TD 16
Polynômes et fractions rationnelles

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. *Sur les racines de polynômes réels*. Soir P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

1. On suppose P scindé à racines simples. Montrer que P' est scindé à racines simples.
2. En déduire que si P est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, alors P^2+1 est à scindé à racines simples **sur** $\mathbb{C}$.
3. Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$ (pas nécessairement à racines simples), P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soient P dans $\mathbb{C}[X]$ et a, b deux complexes.

1. Déteminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$. On distinguera les cas $a=b$ et $a \neq b$.
2. En déduire le reste de la division euclidienne de $(\cos(\theta)+X\sin(\theta))^n$ par X^2+1.

Exercice 3.

1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ pour lesquels pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)=n^2$.
2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ pour lesquels pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)=n^2+(-1)^n$.

Exercice 4. Soit $(x,y,z) \in (\mathbb{C}^*)^3$. On pose $P=(X-x)(X-y)(X-z)$.

1. Que vaut P si (x,y,z) est solution de

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=21 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1 \end{cases}$$

2. En déduire l'ensemble des triplets (x,y,z) satisfaisant le système précédent.

Exercice 5. *Polynômes de Tchebycheff*. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer un polynôme T à coefficients réels de degré n vérifiant la propriété $(*)$:

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T(\cos(\theta))=\cos(n\theta). \qquad (*)$$

2. Montrer qu'un polynôme vérifiant (*) est unique.
3. Déterminer, pour tout entier naturel n, le degré et le coefficient dominant de T_n.
4. Montrer que $T_{n+2}=2XT_{n+1}-Tn$.
5. Calculer T_0 ,T_1 ,T_2 ,T_3.
6. Montrer que $T_n=2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}(X-\cos(\theta_k))$, où $\theta_k=\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$.

Exercice 6. ●○○ Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $P(X^n)$ est divisible par $X-1$, alors il l'est aussi par X^n-1.

Exercice 7. Soient A et B dans $\mathbb{K}[X]$.

1. Si $C \in \mathbb{K}[X]$, déterminer tous les couples (U,V) tels que $AU+BV=C$.
2. Si A et B sont premiers entre eux montrer qu'il existe un unique couple U,V tels que $AU+BV=1$, $\deg(U)<\deg(B)$ et $\deg(V)<\deg(A)$.

Exercice 8. *Variations autout de X^n-1.* **1.** Montrer que si b divise a, alors X^b-1 divise X^a-1.

2. Déterminer le reste dans la division euclidienne de X^a-1 par X^b-1 (en supposant $b \leqslant a$), en fonction du quotient q et du reste r de la division euclidienne de a par b.

3. En déduire que $(X^a-1)\wedge(X^b-1)=X^{a\wedge b}-1$.

Exercice 9. ●○○ Soient $n \geqslant 2, x_1,\dots,x_n \in \mathbb{K}$ distincts et $L_1,\dots,L_n$ les polynômes de Lagrange associés. Simplifier les sommes
$\sum_{i=1}^{n} L_i$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i L_i$.

Exercice 10.

1. Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $P(x)\in\mathbb{R}$?

2. Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que pour tout x dans $\mathbb{Q}$, $P(x)\in\mathbb{Q}$?

3. Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que pour tout x dans $\mathbb{U}$, $P(x)\in\mathbb{U}$?

Exercices à faire en TD – minimum vital

Premier TD. Durant la première séance de TD, il faut se focaliser sur les bases : exercices 12, 13, 15 qui doivent se faire **rapidement (en moins de 30 minutes pour le total des 3)**, l'exercice 11, les exercice 20, 21.

Deuxième TD. Poursuivre les exercices liés à l'arithmétique et aux racines (25, 28). Faire un exercice théorique lié à la décomposition en éléments simples (**??**), et un lié à l'interpolation de Lagrange (32).

2 Degré, division euclidienne

Exercice 11. ●○○ Trouver les $P\in\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2)=(X^2+1)P(X)$.

Exercice 12. ◐○○ Effectuer la division euclidienne de $3X^4-2X^3+X^2+1$ par $(X+1)$ et par $(X+1)^2$.

Exercice 13. ●○○ Déterminer l'ensemble des unités de l'anneau $(\mathbb{K}[X],+,\times)$.

Exercice 14. *« Équations différentielles » polynomiales* ●●○

1. Résoudre l'équation $(X-1)P'+XP=1+\dfrac{X^3}{2}$.

2. Résoudre l'équation $4P=(X-1)P'+P''$.

Exercice 15. ●○○ En utilisant un bon produit de polynômes, simplifier $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{k}\binom{n}{\ell}\binom{p}{k-\ell}$.

Exercice 16. *Une identité.* ●●○ Soient $n\in\mathbb{N}$ et $k\in[\![0,n]\!]$. On pose : $S=\displaystyle\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}$ et $P=\displaystyle\sum_{i=k}^{n}(X+1)^i$.

1. Exprimer S en fonction de $P^{(k)}(0)$.

2. En déduire S.

Exercice 17. ●○○ Déterminer le reste dans la division euclidienne de X^4-X+a par X^2-aX+1. En déduire un critère de divisibilité de X^4-X+a par X^2-aX+1.

Exercice 18. ●●◐ Montrer que pour tout n il existe un unique polynôme P_n tel que

$$P_n(X)-P_n'(X)=X^n,$$

et déterminer une expression des coefficients de P_n.

Exercice 19. ●●● Soit P un polynôme à coefficients entiers. On note $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k$. On appelle contenu de P et on note $\text{cont}(P)$ le pgcd des a_k.

1. Soient P et Q deux polynômes tels que $\text{cont}(P) = 1$. Soit $R = PQ$. Soit p un facteur premier de $\text{cont}(R)$
   (i) On suppose que le coefficient constant de P est premier avec p. Montrer que p divise tous les coefficients de Q.
   (ii) Dans le cas contraire, se ramener au cas précédent.
   (iii) En déduire que $\text{cont}(Q) = \text{cont}(R)$.
   (iv) Déterminer de manière générale $\text{cont}(PQ)$.

2. Soit R dans $\mathbb{Z}[X]$ tel qu'il existe P et Q dans $\mathbb{Q}[X]$ tels que $R = PQ$. Montrer qu'il existe A et B dans $\mathbb{Z}[X]$ tels que $R = AB$.

3 Racines

Exercice 20. ●○○

1. Pourquoi n'y a-t-il pas de polynôme réel P tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sin(x)$?

2. Pourquoi n'y a-t-il pas de polynôme réel P tel que $\forall x \in [0, 2\pi],\ P(x) = \sin(x)$?

3. Pourquoi n'y a-t-il pas de polynôme réel P tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \lfloor x \rfloor$?

4. Pourquoi n'y a-t-il pas de polynôme complexe P tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = \overline{z}$?

Exercice 21. ●●○ Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{C}$ pour que $X^3 - 7X + \lambda$ admette une racine qui soit le double d'une autre. Résoudre alors l'équation.

Exercice 22. ●●○ Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{C}^3$:

$$(1) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ xyz = 2 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3 \end{cases}$$

Exercice 23. ●●○ Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$. Soit ω une racine de P. Montrer que

$$|\omega| \leqslant 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right|.$$

Exercice 24. ●●● Déterminer les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ qui vérifient $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

4 Arithmétique et polynômes irréductibles

Exercice 25. ◐○○ Déterminer la décomposition en produit d'irréductibles sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ de

(i) $X^4 + 2X^2 + 1$

(ii) $X^6 + X^3 + 1$

(iii) $X^3 - 27$

(iv) $1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-1}$ (sur $\mathbb{C}$ uniquement)

(v) $X^{2n+1} + 1$.

 nlaillet.math@gmail.com

Exercice 26. **1.** Rappeler la décomposition en produits d'irréductibles de $X^n - 1$.

2. En déduire la décomposition en produits d'irréductibles de $1 + X + \cdots + X^{n-1}$.

3. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

4. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)$.

Exercice 27. ●○○ Calculer le PGCD et le PPCM de $2X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 2X + 1$ et de $3X^3 + 4X^2 + 4X + 1$.

Exercice 28. ●○○ Montrer que pour tout entier naturel n,

$$nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$$

est divisible par $(X-1)^3$.

Exercice 29. ●●○ Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, le polynôme $X^n \sin\theta - X\sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta)$ est divisible par $X^2 - 2X\cos\theta + 1$

Exercice 30. ●●● On cherche à démontrer le résultat suivant : si $P \in \mathbb{R}[X]$ est positif sur $\mathbb{R}$, alors on dispose de A et B dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

1. Démontrer que $\{A^2 + B^2,\ (A, B) \in \mathbb{R}[X]\}$ est stable par produit.

2. En considérant la décomposition de P en produit d'irréductibles, en déduire le résultat.

Exercice 31. ●●○ Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Montrer que A et B sont premiers entre eux si et seulement si AB et $A + B$ sont premiers entre eux.

5 Polynômes célèbres

Exercice 32. *Un exercice sur les polynômes de Lagrange*. ●◐○
Soient $L_1, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés à $1, \dots, n$.

1. Déterminer le coefficient dominant de L_k pour $k \in [\![1, n]\!]$.

2. Déterminer l'expression d'un polynôme P de degré $n-1$ tel que : $\forall k \in [\![1, n]\!], P(k) = k^{n-1}$.

- En donnant directement l'expression évidente.
- À l'aide des $L_1, \dots, L_n$.

3. En déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^n$.

Exercice 33. *Polynômes de Tchebycheff, suite*. ●●○ Cet exercice a besoin du premier exercice sur les polynômes de Tchebycheff.
Si f est une fonction définie sur $[-1, 1]$, on définit $||f||_\infty = \displaystyle\sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$.

1. Calculer $||T_n||_\infty$.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |\sin nu| \leqslant n|\sin u|$.

3. En déduire $||T_n'||_\infty = n^2$.

4. Montrer que $\forall r \in \mathbb{R}^*,\ T_n\left(\dfrac{r + r^{-1}}{2}\right) = \dfrac{r^n + r^{-n}}{2}$.

5. Soit un réel $x \in [1, +\infty[$.

(i) Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}^*$, tel que $x = \dfrac{r + r^{-1}}{2}$.

(ii) En déduire que $1 \leqslant T_n(x) \leqslant \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n$.

6. En dérivant l'égalité $T_n(\cos t) = \cos nt$ valable pour tout réel $t \in [0, \pi]$, trouver une équation différentielle linéaire homogène du second ordre vérifiée sur $\mathbb{R}$ par T_n.

7. Soit $k \in \mathbb{N},\ k \leqslant n$. Déduire de la question précédente que $T_n^{(k)}(1) = \dfrac{n}{n+k}\dfrac{(n+k)!}{(n-k)!}\dfrac{2^k k!}{(2k)!}$. Montrer que $T_n^{(k)}(-1) = (-1)^{n+k}T_n^{(k)}(1)$.

Exercice 34. *Polynômes de Legendre*. ●●○ Pour tout entier naturel n on pose

$$L_n = \frac{n!}{(2n)!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$$

1. Montrer que L_n est un polynôme unitaire de degré n.

2. Montrer que

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_{-1}^{1} L_n(t)Q(t)dt = 0$$

3. En déduire que L_n possède n racines simples toutes dans $]-1,1[$. On utilisera sans la démontrer la propriété suivante : toute fonction continue positive sur un segment d'intégrale nulle sur ce segment est nulle.

Exercice 35. *Polynômes cyclotomiques*. ●●● On définit l'ensemble des racines primitives n-ièmes de l'unité par $\mathcal{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!] \text{ et } k \wedge n = 1\}$.

1. Que vaut

$$\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X-\omega)?$$

On appelle n-ième polynôme cyclotomique le polynôme

$$\Phi_n(X) = \prod_{\omega \in \mathcal{U}_n}(X-\omega) = \prod_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \wedge n = 1}} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right).$$

2. Soit p un nombre premier. Que vaut $\Phi(p)(X)$?

3. On veut montrer que

$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X).$$

(i) Soit d un entier divisant n, montrer que toute racine de Φ_d est une racine n-ième de l'unité. Réciproquement, montrer que toute racine n-ième de l'unité est une racine primitive δ-ième de l'unité pour un certain δ divisant n.
On a donc montré que $X^n - 1$ et $\prod_{d|n} \Phi_d(X)$ avaient les mêmes racines.

(ii) Montrer que $X^n - 1$ est à racines simples.

(iii) Montrons que $\prod_{d|n} \Phi_d(X)$ est à racines simples.

- Soient $d \neq \delta$ deux entiers. Montrer que $\mathcal{U}_d \cap \mathcal{U}_\delta = \emptyset$.
- En déduire que $\prod_{d|n} \Phi_d(X)$ est à racines simples.

(iv) Conclure.

4. Soit φ l'indicatrice d'Euler : $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers inférieurs à n et premiers avec n. Montrer que $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

Indications

1.
  1. Utiliser le théorème de Rolle.
  2. Utiliser le fait qu'un polynôme est à racines simples ssi il est premier avec son polynôme dérivé.
  3. Utiliser le théorème de Rolle et compter les racines de P' avec multiplicité.

2.
  1. Penser à distinguer les cas $a = b$ et $a \neq b$. Le premier cas se résout avec une formule de Taylor. Le second se résout à la main, en adaptant la preuve du « reste de la division euclidienne par $X - \alpha$ »
  2. Utiliser le résultat précédent et l'exponentielle complexe.

4. L'idée fondamentale est de penser aux **relations coefficients-racines** ! Dans le premier système, on a facilement la somme des racines et, si l'on multiplie la dernière équation par xyz, on a une relation entre le produit des racines et la quantité $xy + yz + zx$! Enfin, remarquer ce que vaut $x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx)$.

5.
  1. On pourra remarquer que $\cos(n\theta)$ est la partie réelle de $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$.
  2. Utiliser le fait que deux polynômes égaux en une infinité de points sont égaux.
  3. Utiliser la formule trouvée en 1.
  4. Écrire $\cos((n+1)\theta)$ en fonction de $\cos(n\theta)$ et $\cos((n+2)\theta)$.
  5.
  6. Regarder les points d'annulation de $\cos(n\theta)$.

7. Conseil important : référez-vous au chapitre d'arithmétique des entiers ! L'idée est que tout a déjà été fait dans ce chapitre !

8.
  1. Commencer à factoriser comme on voudrait et utiliser l'identité de Bernoulli.
  2. Utiliser l'algorithme d'Euclide.

10.
  1. Lagrange
  2. Lagrange
  3. Remarquer que pour tout z dans $\mathbb{U}$, $|P(z)|^2 = 1$. On aura intérêt à considérer, si P est de degré n, le polynôme $Q(X) = P(X)X^n\overline{P}\left(\dfrac{1}{X}\right)$, en s'assurant que l'on définit bien un polynôme de cette manière.

11. Faire un raisonnement sur le degré.

12. Faire le calcul comme indiqué en cours. Ou utiliser la formule de Taylor.

13. Revoir ce qu'est l'ensemble des unités d'un anneau, puis faire un raisonnement sur le degré.

14. Bien sûr, il ne s'agit pas de résoudre les équations différentielles comme au chapitre 7 ! Regarder le degré, regarder le coefficient dominant, les coefficients constants, etc !

15. Reconnaître le coefficient d'ordre k du produit $(X+1)^n(X+1)^p$.

16. Le même que le précédent, en plus dur !
  1. Dériver la somme, vous devriez trouver ce qu'il faut !
  2. P fait penser à une somme géométrique... essayez d'écrire ce que vaut $XP(X) = ((X+1) - 1)P(X)$. Puis, dériver cette expression $k+1$ fois !

17. Poser la division euclidienne et chercher une CNS pour que ce reste soit nul.

18. Résoudre un système linéaire !

20. Raisonner sur les racines, ou bien la dérivabilité.

21. Écrire un système d'équations que doit vérifier α.

22. Inspirez-vous fortement de l'exercice 4 !

23. Prendre ω une racine de P. Si elle est de module $\leqslant 1$, c'est bon. Sinon, utiliser le fait que $|\omega^k| \leqslant |\omega|^n$ pour tout $k \leqslant n$.

24. Montrer que P est nul ou de la forme $X^a(X-1)^a$.

25. Reconnaître des racines de l'unité.

26. Utiliser la décomposition obtenue en question 2, l'évaluer en 1, en $e^{-2i\theta}$...

27. Utiliser l'algorithme d'Euclide ou une relation de Bézout.

28. Utiliser les racines !

29. De même, déterminer les racines du polynôme qui est censé diviser l'autre !

31. Exercice fait en arithmétique des entiers relatifs. Utiliser des relations de Bézout.

32. Utiliser l'expression vue en cours des polynômes de Lagrange.

33.
1.
2. Faire une récurrence.
3. Montrer que $||T_n||_\infty \leqslant 1$ puis que cette quantité est atteinte.
4. Faire une récurrence
5. (i)
   (ii) Résoudre l'équation du second degré vérifiée par r.
6.
7. Faire une récurrence

34.
1. Utiliser un calcul de dérivée n-ième.
2. Faire des IPP
3. Question presque faite dans le chapitre de dérivabilité.

35.
1. Utiliser que tout nombre de $[\![1, p-1]\!]$ est premier avec p.
2. (i) Utiliser proprement les racines de l'unité.
   (ii)
   (iii) Utiliser le théorème de Gauss
   (iv)
3. Utiliser les degrés.