TD 16
Polynômes et fractions rationnelles

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. *Sur les racines de polynômes réels*. Soir P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

1. On suppose P scindé à racines simples. Montrer que P' est scindé à racines simples.

Correction

Soit n le degré de P, $a_1, \dots, a_n$ ses racines simples. Alors, pour tout i dans $[\![1, n-1]\!]$, P est continue sur $[a_i, a_{i+1}]$, dérivable sur $]a_i, a_{i+1}[$, $P(a_i) = P(a_{i+1}) = 0$ donc, d'après le théorème de Rolle, on dispose de b_i dans $]a_i, a_{i+1}[$ tel que $P'(b_i) = 0$. On a donc trouvé $n-1$ racines **distinctes** de P'. Or, P' est de degré $n-1$: on a donc trouvé toutes les racines de P', et P' est donc scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire que si P est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, alors P^2+1 est à scindé à racines simples **sur** $\mathbb{C}$.

Correction

Soit n le degré de P. On calcule $(P^2+1)' = 2PP'$. Comme P est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, P' aussi et P et P' n'ont pas de racines en commun, donc $2PP'$ a $n+n-1 = 2n-1$ racines. Donc $(P^2+1)'$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Or, P^2+1 est strictement positif sur $\mathbb{R}$ donc n'a aucune racine réelle. Donc P^2+1 et $(P^2+1)'$ n'ont pas de racine en commun. Donc P^2+1 est à racines simples (et donc scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$).

3. Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$ (pas nécessairement à racines simples), P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

Correction

Soit n le degré de P, soient $a_1, \dots, a_r$ les racines de P, $m_1, \dots, m_r$ leurs multiplicités. On sait que P a n racines comptées avec multiplicités, i.e. que $m_1 + \cdots + m_r = n$.

- En appliquant le théorème de Rolle entre a_i et a_{i+1}, pour tout i dans $[\![1, r-1]\!]$, on obtient $r-1$ racines de P', toutes distinctes de $a_1, \dots, a_r$.
- Ensuite, soit i dans $[\![1, r]\!]$. Comme a_i est racine de multiplicité m_i de P, a_i est racine de multiplicité $m_i - 1$ de P' (éventuellement nulle). D'où, en les comptant avec multiplicités, $\displaystyle\sum_{i=1}^{r}(m_i - 1)$ racines comptées avec multiplicité, i.e. $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{r} m_i\right) - r = n - r$ racines comptées avec multiplicité.

Au final, on obtient $n - r + r - 1 = n - 1$ racines réelles comptées avec multiplicité pour P', qui est de degré $n-1$: toutes les racines de P' sont donc réelles, donc P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soient P dans $\mathbb{C}[X]$ et a, b deux complexes.

1. Déteminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$. On distinguera les cas $a = b$ et $a \neq b$.

Correction

Distinguons les cas :

- si $a = b$, le reste est $P(a) + (X - a)P'(a)$.
- si $a \neq b$, on écrit le reste comme $\alpha X + \beta$, et on a $P(a) = \alpha a + \beta$, $P(b) = \alpha b + \beta$, donc $\alpha = \dfrac{P(b) - P(a)}{b - a}$ et $\beta = \dfrac{bP(a) - aP(b)}{b - a}$.

2. En déduire le reste de la division euclidienne de $(\cos(\theta) + X\sin(\theta))^n$ par $X^2 + 1$.

Correction

Ici, on remarque que si $P(X) = (\cos(\theta) + X\sin(\theta))^n$, $a = i$ et $b = -i$, on est dans la situation de la question précédente. On a alors $P(a) = \mathrm{e}^{in\theta}$ et $P(b) = \mathrm{e}^{-in\theta}$. Donc le reste est $\alpha X + \beta$, avec

$$\alpha = \frac{\mathrm{e}^{in\theta} - \mathrm{e}^{-in\theta}}{i - (-i)} = \frac{\mathrm{e}^{in\theta} - \mathrm{e}^{-in\theta}}{2i} = \sin(n\theta),$$

et

$$\beta = \frac{i\mathrm{e}^{in\theta} - (-i)\mathrm{e}^{-in\theta}}{2i} = \frac{\mathrm{e}^{in\theta} + \mathrm{e}^{-in\theta}}{2} = \cos(n\theta),$$

donc le reste de la division euclidienne de $(\cos(\theta) + X\sin(\theta))^n$ par $X^2 + 1$ est $\sin(n\theta)X + \cos(n\theta)$.

Exercice 3.

1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ pour lesquels pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = n^2$.

2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ pour lesquels pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = n^2 + (-1)^n$.

Exercice 4. Soit $(x, y, z) \in (\mathbb{C}^*)^3$. On pose $P = (X - x)(X - y)(X - z)$.

1. Que vaut P si (x, y, z) est solution de

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 21 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \end{cases}$$

2. En déduire l'ensemble des triplets (x, y, z) satisfaisant le système précédent.

Exercice 5. *Polynômes de Tchebycheff*. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer un polynôme T à coefficients réels de degré n vérifiant la propriété $(*)$:

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T(\cos(\theta)) = \cos(n\theta). \tag{*}$$

2. Montrer qu'un polynôme vérifiant $(*)$ est unique.

3. Déterminer, pour tout entier naturel n, le degré et le coefficient dominant de T_n.

4. Montrer que $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - Tn$.

5. Calculer T_0 ,T_1 ,T_2 ,T_3.

6. Montrer que $T_n = 2^{n-1} \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (X - \cos(\theta_k))$, où $\theta_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$.

Exercice 6. ●○○ Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $P(X^n)$ est divisible par $X - 1$, alors il l'est aussi par $X^n - 1$.

Exercice 7. Soient A et B dans $\mathbb{K}[X]$.

1. Si $C \in \mathbb{K}[X]$, déterminer tous les couples (U, V) tels que $AU + BV = C$.

2. Si A et B sont premiers entre eux montrer qu'il existe un unique couple U, V tels que $AU + BV = 1$, $\deg(U) < \deg(B)$ et $\deg(V) < \deg(A)$.

Exercice 8. *Variations autout de $X^n - 1$.* **1.** Montrer que si b divise a, alors $X^b - 1$ divise $X^a - 1$.

Correction

Écrivons $a = bq$ avec $q \in \mathbb{N}$. Alors

$$X^a - 1 = X^{bq} - 1 = (X^b)^q - 1^q = (X^b - 1)(X^{b(q-1)} + X^{b(q-2)} + \cdots + 1).$$

2. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $X^a - 1$ par $X^b - 1$ (en supposant $b \leqslant a$), en fonction du quotient q et du reste r de la division euclidienne de a par b.

Correction

On écrit $a = bq + r$. Alors

$$\begin{aligned} X^a - 1 &= X^{bq+r} - 1 \\ &= X^{bq+r} - X^r + X^r - 1 \\ &= X^r(X^{bq} - 1) + X^r - 1 \\ &= X^r(X^{bq} - 1^q) + X^r - 1 \\ &= X^r(X^b - 1)(X^{b(q-1)} + X^{b(q-2)} + \cdots + 1) + X^r - 1, \end{aligned}$$

donc le quotient de la division est $X^r(X^{b(q-1)} + X^{b(q-2)}$ et le reste est $X^r - 1$.

3. En déduire que $(X^a - 1) \wedge (X^b - 1) = X^{a \wedge b} - 1$.

Correction

Appliquons l'algorithme d'Euclide à $X^a - 1$ et $X^b - 1$. Soit (r_n) la suite des restes de l'algorithme d'Euclide appliqué à a et b, avec $r_0 = a$, $r_1 = b$ et r_{n+2} le reste de la division euclidienne de r_n par r_{n+1}. Soit (P_n) la suite des restes de l'algorithme d'Euclide appliqué à $(X^a - 1)$ et $(X^b - 1)$, avec $P_0 = (X^a - 1)$, $P_1 = (X^b - 1)$ et P_{n+2} le reste de la division euclidienne de P_n par P_{n+1}. On peut démontrer, par récurrence, que pour tout n, $P_n = X^{r_n} - 1$, par récurrence double.
L'initialisation est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, par hypothèse.
Ensuite, si la proposition est vraie aux n et $n+1$, on écrit $P_n = X^{r_n} - 1$ et $P_{n+1} = X^{r_{n+1}} - 1$. Alors P_{n+2} est le reste de la division euclidienne de P_n par P_{n+1}, donc c'est, par la question précédente $X^{r_{n+2}} - 1$ car r_{n+2} est le reste de la division euclidienne de r_n par r_{n+1}.
D'où l'hérédité, et le résultat.

On déduit donc, en appliquant l'algorithme d'Euclide, que si n_0 est le rang tel que $r_{n_0} = a \wedge b$, alors $r_{n_0+1} = 0$ et donc $P_{n_0} = X^{a\wedge b} - 1$ et $P_{n_0+1} = X^0 - 1 = 0$, donc $P_{n_0} = (X^a - 1) \wedge (X^b - 1)$.

Exercice 9. ●○○ Soient $n \geqslant 2, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ distincts et $L_1, \ldots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés. Simplifier les sommes
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} L_i$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i L_i$.

Exercice 10.

1. Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $P(x) \in \mathbb{R}$?

2. Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que pour tout x dans $\mathbb{Q}$, $P(x) \in \mathbb{Q}$?

3. Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que pour tout x dans $\mathbb{U}$, $P(x) \in \mathbb{U}$?

Exercices à faire en TD – minimum vital

Premier TD. Durant la première séance de TD, il faut se focaliser sur les bases : exercices 12, 13, 15 qui doivent se faire **rapidement (en moins de 30 minutes pour le total des 3)**, l'exercice 11, les exercice 20, 21.

Deuxième TD. Poursuivre les exercices liés à l'arithmétique et aux racines (25, 28). Faire un exercice théorique lié à la décomposition en éléments simples (**??**), et un lié à l'interpolation de Lagrange (32).

2 Degré, division euclidienne

Exercice 11. ●○○ Trouver les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.

Correction

Analyse. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$. Alors P n'est pas constant, et $2\deg P = 2 + \deg(P)$, donc $\deg(P) = 2$, donc $P(X) = aX^2 + bX + c$. Donc

$$aX^4 + bX^2 + c = (X^2+1)(aX^2+bX+c) = aX^2 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c,$$

donc nécessairement $b = 0$, et $a + c = b = 0$, i.e. $a = -c$.
Synthèse. Soit a dans $\mathbb{R}^*$. Alors si $P(X) = aX^2 - a$,

$$P(X^2) = aX^4 - a = a(X^2-1)(X^2+1) = P(X)(X^2+1),$$

d'où le résultat.

Exercice 12. ◐○○ Effectuer la division euclidienne de $3X^4-2X^3+X^2+1$ par $(X+1)$ et par $(X+1)^2$.

Correction

En posant la division euclidienne, on trouve que

$$3X^4 + X^2 - 2X^3 + 1 = (3X^3 - 5X^2 + 6X - 6)(X+1) + 7.$$

En posant la deuxième division euclidienne, on trouve

$$3X^4 + X^2 - 2X^3 + 1 = (3X^2 - 8X + 14)(X-1)^2 + (-20X - 13)$$

Remarque : les restes s'obtiennent facilement avec la formule de Taylor !

Exercice 13. ●○○ Déterminer l'ensemble des unités de l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$.

Correction

Soit P une unité de $\mathbb{K}[X]$. On dispose alors de Q tel que $PQ = 1$, donc $\deg(P) + \deg(Q) = 0$, donc, comme P et Q sont non nuls, $\deg(P) = \deg(Q) = 0$, donc $P = \lambda \in \mathbb{K}^*$. Réciproquement, tout scalaire non nul est un un inversible de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 14. *« Équations différentielles » polynomiales* ●●○

1. Résoudre l'équation $(X-1)P' + XP = 1 + \dfrac{X^3}{2}$.
2. Résoudre l'équation $4P = (X-1)P' + P''$.

Exercice 15. ●○○ En utilisant un bon produit de polynômes, simplifier $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{k}\binom{n}{\ell}\binom{p}{k-\ell}$.

Correction

Posons $c_k = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{k}\binom{n}{\ell}\binom{p}{k-\ell}$ .On reconnaît ici un produit de Cauchy. Posons $a_\ell = \binom{n}{\ell}$ et $b_n = \binom{p}{\ell}$. Alors si $P(X) = \displaystyle\sum_{\ell\geqslant 0} a_\ell X^\ell$ et $Q(X) = \displaystyle\sum_{\ell\geqslant 0} b_\ell X^\ell$ (les sommes sont en fait finies), alors c_k est le terme de degré k de $P(X)Q(X)$. Simplifions les expressions de P et Q :

$$\begin{aligned} P(X) &= \sum_{\ell\geqslant 0} a_\ell X^\ell = \sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}X^\ell = (X+1)^n,\\ Q(X) &= (1+X)^p, \end{aligned}$$

donc $R(X) = (1+X)^{n+p}$. On en déduit que $c_k = \binom{n+p}{k}$, donc

$$\sum_{\ell=0}^{k}\binom{n}{\ell}\binom{p}{k-\ell} = \binom{n+p}{k}.$$

Exercice 16. *Une identité.* ●●○ Soient $n\in\mathbb{N}$ et $k\in[\![0,n]\!]$. On pose : $S = \displaystyle\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}$ et $P = \displaystyle\sum_{i=k}^{n}(X+1)^i$.

1. Exprimer S en fonction de $P^{(k)}(0)$.
2. En déduire S.

Exercice 17. ●○○ Déterminer le reste dans la division euclidienne de $X^4 - X + a$ par $X^2 - aX + 1$. En déduire un critère de divisibilité de $X^4 - X + a$ par $X^2 - aX + 1$.

Correction

On écrit

$$X^4 - X + a = (X^2 - aX + 1)(X^2 + aX + (a^2-1)) + (a^2 - a - 1)((1+a)X - 1),$$

ce reste est nul si et seulement si $a^2 - a - 1 = 0$, i.e. $a = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Exercice 18. ●●◐ Montrer que pour tout n il existe un unique polynôme P_n tel que

$$P_n(X) - P_n'(X) = X^n,$$

et déterminer une expression des coefficients de P_n.

Correction

Utilisons les systèmes linéaires pour résoudre ce problème. Soit n dans $\mathbb{N}$. Si P est solution de l'équation alors nécessairement $\deg(P) = n$. Écrivons alors $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Alors $P'(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}(k+1)X^k$, donc

$$P_n(X) - P_n'(X) = a_n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}(k+1))X^k.$$

En identifiant les coefficients de cette expression avec ceux de X^n, on obtient

$$\left\{\begin{array}{llllll} a_0 & -a_1 & & & & = 0 \\ & a_1 & -2a_2 & & & = 0 \\ & & a_2 & -3a_3 & & = 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & a_{n-1} & -na_n = 0 \\ & & & & & a_n = 1 \end{array}\right., \text{ i.e. } \left\{\begin{array}{l} a_n = 1 \\ a_{n-1} = na_n = n \\ a_{n-2} = (n-1)a_{n-1} = n(n-1) \\ \vdots \\ a_k = \dfrac{n!}{k!} \\ \vdots \\ a_0 = n! \end{array}\right.$$

On en déduit que nécessairement, $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} X^k$. Vérifier que $P_n - P_n' = X^n$ est alors immédiat.

Exercice 19. ●●● Soit P un polynôme à coefficients entiers. On note $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k$. On appelle contenu de P et on note $\mathrm{cont}(P)$ le pgcd des a_k.

1. Soient P et Q deux polynômes tels que $\mathrm{cont}(P) = 1$. Soit $R = PQ$. Soit p un facteur premier de $\mathrm{cont}(R)$

(i) On suppose que le coefficient constant de P est premier avec p. Montrer que p divise tous les coefficients de Q.

Correction

Écrivons que $P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, $Q(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$ et $R(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k X^k$. Démontrons par récurrence forte sur k que p divise b_k.

Initialisation. p divise $c_0 = a_0 b_0$. Mais $p \wedge a_0 = 1$ donc, par le théorème de Gauss, p divise b_0.

Hérédité. On suppose que p divise $b_0, \dots, b_k$ pour un certain k. Mais p divise $c_{k+1} = \sum_{\ell=0}^{k+1} a_\ell b_{k+1-\ell}$. Comme p divise $b_0, \dots, b_k$, p divise les $k+1$ premiers termes de la somme, et donc aussi son dernier terme, i.e. $a_0 b_{k+1}$. Comme $p \wedge a_0 = 1$, p divise b_{k+1}.

(ii) Dans le cas contraire, se ramener au cas précédent.

Correction

Si p divise a_0, il y a tout de même un plus petit entier k tel que p soit premier avec a_k (sinon p diviserait tous les a_i donc le pgcd des a_i donc le contenue de P, absurde car le contenu de

P est égal à 1). Mais alors on fait la même démonstration que précédemment. Démontrons par récurrence forte sur k que p divise b_k.

Initialisation. p divise $c_m = \sum_{\ell=0}^{m} a_\ell b_{m-\ell}$. Comme p divise tous les a_ℓ pour ℓ allant de 0 à $m-1$, p divise $a_m b_0$ donc p divise b_0. **Hérédité.** L'hérédité se fait alors de la même manière.

(iii) En déduire que $\text{cont}(Q) = \text{cont}(R)$.

Correction

Déjà, on sait que $\text{cont}(Q)$ divise tous les coefficients de Q donc, par la formule du produit de Cauchy, divise tous les coefficients de R, donc divise $\text{cont}(R)$.
Mais on sait aussi que si p est un facteur premier de $\text{cont}(R)$, alors il divise tous les coefficients de Q. On peut donc, si p est un facteur premier de $\text{cont}(R)$, écrire l'égalité $R = PQ$ sous la forme $pR_2 = pPQ_2$ avec R_2 et Q_2 obtenus en divisant tous les coefficients de R et de Q par p. En simplifiant par p, en réitérant (récurrence) et en décomposant $\text{cont}(R)$ en facteurs premiers, on parvient donc à montrer que $\text{cont}(R)$ divise tous les coefficients de Q donc $\text{cont}(Q)$.
D'où l'égalité !

(iv) Déterminer de manière générale $\text{cont}(PQ)$.

Correction

Si P est quelconque, on écrit $P = \text{cont}(P)S$ avec $\text{cont}(S) = 1$. On en déduit que

$$\text{cont}(PQ) = \text{cont}(\text{cont}(P)SQ) = \text{cont}(P)\text{cont}(SQ) = \text{cont}(P)\text{cont}(Q).$$

2. Soit R dans $\mathbb{Z}[X]$ tel qu'il existe P et Q dans $\mathbb{Q}[X]$ tels que $R = PQ$. Montrer qu'il existe A et B dans $\mathbb{Z}[X]$ tels que $R = AB$.

Correction

Écrivons tous les coefficients de P et de Q sous formes irréductibles, posons p le ppcm des dénominateurs des coefficients de P et q celui des coefficients de Q. Alors $S = pP \in \mathbb{Z}[X]$ et $T = qQ \in \mathbb{Z}[X]$. Mais alors

$$pqR = ST, \text{ donc } pq\text{cont}(R) = \text{cont}(S)\text{cont}(T).$$

Donc pq divise $\text{cont}(S)\text{cont}(T)$, donc on peut écrire $pq = ab$ avec a qui divise $\text{cont}(S)$ et b qui divise $\text{cont}(T)$. Donc si $A = \frac{1}{a}S$ et $B = \frac{1}{b}T$, on a $A \in \mathbb{Z}[X]$, $B \in \mathbb{Z}[X]$ et $R = AB$.

3 Racines

Exercice 20. ●○○

1. Pourquoi n'y a-t-il pas de polynôme réel P tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sin(x)$?

Correction

P s'annulerait une infinité de fois (en les $2n\pi$) et serait donc nul, absurde.

2. Pourquoi n'y a-t-il pas de polynôme réel P tel que $\forall x \in [0, 2\pi],\ P(x) = \sin(x)$?

Correction

P vérifierait $P'' = -P$, absurde si P non nul.

3. Pourquoi n'y a-t-il pas de polynôme réel P tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \lfloor x \rfloor$?

Correction

P vérifierait $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = n$, donc $P(X) = X$, absurde.

4. Pourquoi n'y a-t-il pas de polynôme complexe P tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = \overline{z}$?

Correction

P vérifierait $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = x$, donc $P(X) = X$, absurde.

Exercice 21. ●●○ Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{C}$ pour que $X^3 - 7X + \lambda$ admette une racine qui soit le double d'une autre. Résoudre alors l'équation.

Correction

On veut qu'il existe α tel que

$$\alpha^3 - 7\alpha + \lambda = 0,$$

et

$$8\alpha^3 - 14\alpha + \lambda = 0,$$

i.e.

$$\alpha^3 - 7\alpha = 8\alpha^3 - 14\alpha,$$

i.e. $7\alpha^3 = 7\alpha$, i.e. $\alpha^2 = 1$, ou $\alpha = 0$, i.e. $\alpha \in \{0, 1, -1\}$. Il faut donc que λ soit tel que 0, 1 ou -1 soit racine du polynôme. On a donc $\lambda = 0$ (0 est alors solution), $\lambda = 6$ (1 est alors solution), ou $\lambda = -6$ (-1 est solution).

Exercice 22. ●●○ Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{C}^3$:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ xyz = 2 \end{array} \right. \qquad (2) \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3 \end{array} \right.$$

Exercice 23. ●●○ Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$. Soit ω une racine de P. Montrer que

$$|\omega| \leqslant 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right|.$$

Correction

Soit ω une racine de P. Si $|\omega| \leqslant 1$, l'inégalité est évidente. Si ce n'est pas le cas, on sait que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \omega^k = 0,$$

i.e.

$$a_n\omega^n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k\omega^k,$$

donc

$$\omega = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n}\omega^{k-(n-1)}.$$

Donc, par l'inégalité triangulaire,

$$|\omega| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{a_k}{a_n}\right| |\omega|^{k-(n-1)}.$$

Or, $|\omega| \geqslant 1$, donc, pour $k \leqslant n-1$, $|\omega|^{k-(n-1)} \leqslant 1$, donc

$$|\omega| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{a_k}{a_n}\right| \leqslant 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{a_k}{a_n}\right|,$$

d'où le résultat.

Exercice 24. ●●● Déterminer les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ qui vérifient $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

Correction

Analyse. Soit P un tel polynôme. Alors si α est racine de P, α^2 l'est aussi, de même que $\alpha - 1^2$. Or, si $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\alpha \neq 0$ ou $\alpha \neq 1$, alors l'un des deux nombres α ou $\alpha - 1$ est de module différent de 0 ou de 1. Donc l'une des deux suites $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $((\alpha-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est infinie, donc P est nul (le polynôme nul convient en effet).
Sinon, si P est non nul, ses deux seules racines possibles sont 1 et 0, donc $P(X) = X^a(X-1)^b$. Or, $P(X^2) = X^{2a}(X^2-1)^b = X^{2a}(X-1)^b(X+1)^b$. Ensuite, $P(X)P(X+1) = X^a(X-1)^b(X+1)^aX^b = X^{a+b}(X-1)^b(X+1)^a$. Donc nécessairement, $a = b$. Donc P est nécessairement de la forme

$$P(X) = X^a(X-1)^a,$$

avec $a \in \mathbb{N}$.
Synthèse évidente.

4 Arithmétique et polynômes irréductibles

Exercice 25. ◐○○ Déterminer la décomposition en produit d'irréductibles sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ de

(i) $X^4 + 2X^2 + 1$

Correction

$X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2+1)^2$, il s'agit de la décomposition en produit d'irréductibles sur $\mathbb{R}$. Mais on a aussi $X^4 + 2X^2 + 1 = (X+i)^2(X-i)^2$, décomposition en produit d'irréductibles sur $\mathbb{C}$.

(ii) $X^6 + X^3 + 1$

(iii) $X^3 - 27$

Correction

$X^3 - 27 = (X-3)(X^2+3X+9)$, décomposé sur $\mathbb{R}$ car $3^2 - 4\times 9 < 0$. $X^3 - 27 = (X-3)(X-3j)(X-3j^2)$ sur $\mathbb{C}$.

(iv) $1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-1}$ (sur $\mathbb{C}$ uniquement)

Correction

$$1 + X + \cdots + X^{n-1} = \frac{X^n - 1}{X - 1} = \prod_{\omega\in\mathbb{U}_n\setminus\{1\}} (X - \omega).$$

(v) $X^{2n+1} + 1$.

Exercice 26. **1.** Rappeler la décomposition en produits d'irréductibles de $X^n - 1$.

Correction

On sait que $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$.

2. En déduire la décomposition en produits d'irréductibles de $1 + X + \cdots + X^{n-1}$.

Correction

On sait que $1 + X + \cdots + X^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1}(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$.

3. Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Correction

On évalue le polynôme précédent en 1 et on obtient

$$\begin{aligned}
n &= \prod_{k=1}^{n-1}(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}) \\
&= \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}}(e^{-\frac{ik\pi}{n}} - e^{\frac{ik\pi}{n}}) \\
&= \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}}(-2i)\sin\frac{k\pi}{n} \\
&= \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} 2^{n-1}(-i)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} \\
&= e^{\frac{i(n-1)\pi}{2}} 2^{n-1}(-i)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} \\
&= 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}
\end{aligned}$$

Donc

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

4. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, calculer $\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)$.

Correction

On fait de même en évaluant en $e^{-2i\theta}$ (en supposant $\theta \neq 0[2\pi]$) :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(e^{-2i\theta})^k = \frac{1 - e^{-2in\theta}}{1 - e^{-2i\theta}} = e^{-i(n-1)\theta}\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Mais

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{-2i\theta})^k &= \prod_{k=1}^{n-1}(e^{-2i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}})\\ &= \prod_{k=1}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} e^{-i\theta}(e^{i\left(-\theta-\frac{k\pi}{n}\right)} - e^{i\left(\theta+\frac{k\pi}{n}\right)})\\ &= \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} e^{-i\theta}(-2i)\sin\left(\frac{k\pi}{n}+\theta\right)\\ &= e^{-i(n-1)\theta}e^{\frac{i(n-1)\pi}{2}}2^{n-1}i^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}+\theta\right)\\ &= e^{-i(n-1)\theta}2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}+\theta\right).\end{aligned}$$

Donc

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}+\theta\right) = \frac{\sin(n\theta)}{2^{n-1}\sin(\theta)}$$

Exercice 27. ●○○ Calculer le PGCD et le PPCM de $2X^4+3X^3+4X^2+2X+1$ et de $3X^3+4X^2+4X+1$.

Correction

On détermine ces deux quantités par l'algorithme d'Euclide, et on trouve un pgcd égal à X^2+X+1 et un ppcm égal à $6X^5+11X^4+15X^3+10X^2+5X+1$.

Exercice 28. ●○○ Montrer que pour tout entier naturel n,

$$nX^{n+2}-(n+2)X^{n+1}+(n+2)X-n$$

est divisible par $(X-1)^3$.

Correction

Le plus simple est de voir ce genre d'exercice à l'aide des racines. Si on pose $P(X) = nX^{n+2}-(n+2)X^{n+1}+(n+2)X-n$, il suffit de montrer que 1 est racine de multiplicité 3 de P. Or, $P(1) = n-(n+2)+n+2-n = 0$. Ensuite, $P'(1) = (n+2)n-(n+2)(n+1)+(n+2) = 0$. Enfin, $P''(1) = (n+2)(n+1)n-(n+2)(n+1)n = 0$. Donc 1 est racine de P de multiplicité 3, d'où le résultat.

Exercice 29. ●●○ Montrer que pour tous $n\in\mathbb{N}^*$ et $\theta\in\mathbb{R}$, le polynôme $X^n\sin\theta - X\sin(n\theta)+\sin((n-1)\theta)$ est divisible par $X^2-2X\cos\theta+1$

Exercice 30. ●●● On cherche à démontrer le résultat suivant : si $P\in\mathbb{R}[X]$ est positif sur $\mathbb{R}$, alors on dispose de A et B dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2+B^2$.

1. Démontrer que $\{A^2+B^2,\ (A,B)\in\mathbb{R}[X]\}$ est stable par produit.
2. En considérant la décomposition de P en produit d'irréductibles, en déduire le résultat.

Exercice 31. ●●○ Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Montrer que A et B sont premiers entre eux si et seulement si AB et $A+B$ sont premiers entre eux.

Correction

Cet exercice est là pour montrer que parfois, les exercices utilisent des raisonnements en tout point identiques aux raisonnements d'arithmétique sur les entiers. Déjà, si AB et $A+B$ sont premiers entre eux, tout diviseur commun à A et B divise AB et $A+B$, donc divise $(AB)\wedge(A+B)=1$, donc A et B sont premiers entre eux.
Ensuite, si A et B sont premiers entre eux, on montre que $A+B$ est premier avec A : on écrit $AU+BV=1$ une relation de Bézout. Alors $A(U-V)+(A+B)V=1$, donc $A+B$ est premier avec A. De même $A+B$ est premier avec B, donc il est premier avec AB.
Autre méthode : si α est une racine complexe de AB, c'est soit une racinde de A, soit de B. α est donc une racine de $A+B$ ssi A **ET** B s'annulent en α.

5 Polynômes célèbres

Exercice 32. *Un exercice sur les polynômes de Lagrange.* ●◐○
Soient $L_1,\dots,L_n$ les polynômes de Lagrange associés à $1,\dots,n$.

1. Déterminer le coefficient dominant de L_k pour $k\in[\![1,n]\!]$.

Correction

Par les formules du cours, on sait que

$$L_k(X)=\frac{\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}}(X-i)}{\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}}(k-i)}.$$

Le coefficient dominant de $L_k(X)$ est donc

$$\frac{1}{\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}}(k-i)}.$$

Or

$$\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}}(k-i)=\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant k-1\\ i\neq k}}(k-i)\prod_{\substack{k+1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}}(k-i).$$

En posant $\ell=k-i$, on a

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant k-1}(k-i)=\prod_{1\leqslant \ell\leqslant k-1}\ell=(k-1)!$$

et, en posant $\ell=i-k$,

$$\prod_{k+1\leqslant i\leqslant n}(k-i)=\prod_{1\leqslant \ell\leqslant n-k}-\ell=(-1)^{n-k}(n-k)!$$

Donc le coefficient dominant de L_k est

$$(-1)^{n-k}\frac{1}{(k-1)!(n-k)!}=\frac{(-1)^{n-k}}{(n-1)!}\binom{n-1}{k-1}.$$

2. Déterminer l'expression d'un polynôme P de degré $n-1$ tel que : $\forall k\in[\![1,n]\!], P(k)=k^{n-1}$.

- En donnant directement l'expression évidente.

- À l'aide des $L_1, \dots, L_n$.

Correction

Un polynôme évident est $P(X) = X^{n-1}$. En utilisant les polynômes L_k, on a le polynôme interpolateur

$$Q(X) = \sum_{k=1}^{n} k^{n-1} L_k(X).$$

3. En déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^n$.

Correction

Par unicité du polynôme interpolateur, on a $P = Q$. En particulier leurs coefficients dominants sont égaux, donc

$$1 = \sum_{k=1}^{n} k^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-1)!} \binom{n-1}{k-1}.$$

Or,

$$\begin{aligned} k^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-1)!} \binom{n-1}{k-1} &= k^n \frac{(-1)^{n-k}}{n!} \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \\ &= k^n \frac{(-1)^{n-k}}{n!} \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = n!$$

Exercice 33. *Polynômes de Tchebycheff, suite*. ●●○ Cet exercice a besoin du premier exercice sur les polynômes de Tchebycheff.
Si f est une fonction définie sur $[-1,1]$, on définit $||f||_\infty = \sup\limits_{x \in [-1,1]} |f(x)|$.

1. Calculer $||T_n||_\infty$.

Correction

Si $x \in [-1,1]$, on dispose de θ tel que $x = \cos(\theta)$, donc $T_n(x) = T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ donc $|T_n(x)| \leqslant 1$. De plus, $T_n(1) = T_n(\cos(0)) = \cos(n.0) = \cos(0) = 1$. Donc $|T_n(x)| \leqslant 1$ et on dispose de x_0 tel que $|T_n(x_0)| = 1$. Donc $||T_n||_\infty = 1$.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |\sin nu| \leqslant n|\sin u|$.

Correction

On démontre par récurrence que $\mathcal{P}_n : \forall u,\ |\sin(nu)| \leqslant n|\sin(u)|$.
Initialisation. Pour $n = 0$, $|\sin(0.u)| = 0 \leqslant 0.|\sin(u)|$.

Hérédité. Supposons que pour un certain n, $\forall u,\ |\sin(nu)| \leqslant n|\sin(u)|$. Soit $u \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
|\sin((n+1)u)| &= |\sin(nu)\cos(u) + \sin(u)\cos(nu)| \\
&\leqslant |\sin(nu)\cos(u)| + |\sin(u)\cos(nu)| \\
&\leqslant |\sin(nu)| + |\sin(u)| \\
&\leqslant n|\sin(u)| + |\sin(u)| \quad \text{par hypothèse de récurrence.} \\
&\leqslant (n+1)|\sin(u)|.
\end{aligned}$$

D'où l'hérédité, et le résultat par récurrence.

3. En déduire $||T_n'||_\infty = n^2$.

Correction

On sait que $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$, donc $-\sin(\theta)T_n'(\cos(\theta)) = -n\sin(n\theta)$, donc

$$|\sin(\theta)T_n'(\cos(\theta))| = |n\sin(n\theta)| \leqslant n^2|\sin(\theta)|,$$

donc $|T_n'(\cos(\theta))| \leqslant n^2$, donc, pour tout x dans $[-1,1]$, $|T_n(x)| \leqslant n^2$
Ensuite, calculons $|T_n'(1)| = |T_n'(\cos(0))|$. Par continuité de T_n', $T_n'(\cos(\theta)) \sim_{\theta\to 0} T_n'(0)$, donc $-\sin(\theta)T_n'(\cos(\theta)) \sim -\theta T_n'(0)$ et $-n\sin(n\theta) \sim -n^2\theta$, donc $-\theta T_n'(0) \sim -n^2\theta$, donc $T_n(0) \sim n^2$ donc $|T_n(0)| = n^2$.

4. Montrer que $\forall r \in \mathbb{R}^*,\ T_n\left(\dfrac{r+r^{-1}}{2}\right) = \dfrac{r^n + r^{-n}}{2}$.

Correction

Montrons par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propositon $\mathcal{P}_n : \forall r \in \mathbb{R}^*,\ T_n\left(\dfrac{r+r^{-1}}{2}\right) = \dfrac{r^n+r^{-n}}{2}$ est vraie.

Initialisation. $T_0(X) = 1$ donc $T_0\left(\dfrac{r+r^{-1}}{2}\right) = \dfrac{r^0+r^{-0}}{2}$. De même, $T_1(X) = X$ donc $T_1\left(\dfrac{r+r^{-1}}{2}\right) = \dfrac{r+r^{-1}}{2}$.

Hérédité. On suppose $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ vraies pour un certain n. Alors

$$\begin{aligned}
T_{n+1}\left(\frac{r+r^{-1}}{2}\right) &= 2\left(\frac{r+r^{-1}}{2}\right)T_{n+1}\left(\frac{r+r^{-1}}{2}\right) - T_n\left(\frac{r+r^{-1}}{2}\right) \\
&= 2\left(\frac{r+r^{-1}}{2}\right)\frac{r^{n+1}+r^{-n-1}}{2} - \frac{r^n+r^{-n}}{2} \\
&= \frac{r^{n+2}+r^{-n}}{2} + \frac{r^n+r^{-n-2}}{2} - \frac{r^n+r^{-n}}{2} \\
&= \frac{r^{n+2}+r^{-n-1}}{2},
\end{aligned}$$

d'où la proposition et le résultat !

5. Soit un réel $x \in [1, +\infty[$.

(i) Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}^*$, tel que $x = \dfrac{r+r^{-1}}{2}$.

Correction

L'équation $x = \dfrac{r+r^{-1}}{2}$ est équivalente à $2rx = r^2+1$, i.e. $r^2-2xr+1=0$, de discriminant $2\sqrt{x^2-1}$, bien défini car $x \geqslant 1$, donc $r = x \pm \sqrt{x^2-1}$ sont deux solutions de l'équation.

(ii) En déduire que $1 \leqslant T_n(x) \leqslant \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n$.

Correction

On sait que $x = \dfrac{r+r^{-1}}{2}$, donc $r^2-2xr+1=0$, de discriminant $2\sqrt{x^2-1}$, donc $r = x \pm \sqrt{x^2-1}$. Prenons $r = x+\sqrt{x^2-1}$ par exemple. Alors un bref calcul montre que $\dfrac{1}{r} = x-\sqrt{x^2-1}$! ! (un autre argument permet de voir que $\dfrac{1}{r}$ vérifie la même équation que r). En remplaçant r et $\dfrac{1}{r}$ dans l'expression de la 11, on obtient que

$$T_n(x) = T_n\left(\frac{r+r^{-1}}{2}\right) = \frac{r^n+r^{-n}}{2} = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^{-n}}{2} \leqslant \frac{2(x+\sqrt{x^2-1})}{2},$$

d'où le résultat. De plus, comme $r>0$, $T_n(x) = \dfrac{r^n+r^{-n}}{2} = \mathrm{ch}(n\ln(r)) \geqslant 1$.

6. En dérivant l'égalité $T_n(\cos t) = \cos nt$ valable pour tout réel $t \in [0,\pi]$, trouver une équation différentielle linéaire homogène du second ordre vérifiée sur $\mathbb{R}$ par T_n.

Correction

On sait que $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$, donc $-\sin(\theta)T_n'(\cos(\theta)) = -n\sin(n\theta)$, donc

$$-\cos(\theta)T_n'(\cos(\theta)) + \sin^2(\theta)T_n''(\cos(\theta)) = -n^2\cos(n\theta) = -n^2T_n(\cos(\theta)),$$

i.e.

$$-\cos(\theta)T_n'(\cos(\theta)) + (1-\cos^2(\theta))T_n''(\cos(\theta)) = -n^2T_n(\cos(\theta))$$

, i.e.

$$(1-\cos^2(\theta))T_n''(\cos(\theta)) - \cos(\theta)T_n'(\cos(\theta)) + n^2T_n(\cos(\theta)) = 0,$$

i.e. , pour tout x dans $[-1,1]$,

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0,$$

donc

$$(1-X^2)T_n''(X) - XT_n'(X) + n^2T_n(X) = 0.$$

7. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$. Déduire de la question précédente que $T_n^{(k)}(1) = \dfrac{n}{n+k}\dfrac{(n+k)!}{(n-k)!}\dfrac{2^k k!}{(2k)!}$. Montrer que $T_n^{(k)}(-1) = (-1)^{n+k}T_n^{(k)}(1)$.

Correction

Démonstrons le résultat par récurrence **sur** k.
Initialisation. Déjà $T_n^{(0)}(1) = 1 = \dfrac{n}{(n+0)}\dfrac{(n+0)!}{(n-0)!}\dfrac{2^0.0!}{(2.0)!} = 1$. **Hérédité.** Supposons que pour un certain k, $T_n^{(k)}(1) = \dfrac{n}{n+k}\dfrac{(n+k)!}{(n-k)!}\dfrac{2^k k!}{(2k)!}$.

En dérivant k fois l'équation différentielle précédente (et en utilisant la formule de Leibniz), on obtient

$$\binom{k}{0}(1-X^2)T_n^{(k+2)}(X)-\binom{k}{1}2XT_n^{(k+1)}(X)-\binom{k}{2}2T_n^{(k)}(X)$$
$$-\binom{k}{0}XT_n^{(k+1)}(X)-\binom{k}{1}T_n^{(k)}(X)+n^2T_n^{(k)}(X)=0,$$

donc, en évaluant en 1,

$$-2kT_n^{(k+1)}(1)-k(k-1)T_n^{(k)}(1)-T_n^{(k+1)}(1)-kT_n^{(k)}(1)+n^2T_n^{(k)}(1)=0,$$

donc

$$-(2k+1)T_n^{(k+1)}(1)+(n^2-k^2)T_n^{(k)}(1)=0,$$

donc

$$\begin{aligned}
T_n^{(k+1)}(1) &= \frac{1}{2k+1}(n-k)(n+k)T_n^{(k)}(1)\\
&= \frac{1}{2k+1}(n-k)(n+k)\frac{n}{n+k}\frac{(n+k)!}{(n-k)!}\frac{2^k k!}{(2k)!}\\
&= \frac{1}{2k+1}\frac{2(k+1)}{(2k+2)}n\frac{(n+k+1)}{(n+k+1)}\frac{(n+k)!}{(n-(k+1)!}\frac{2^k k!}{(2k)!}\\
&= \frac{n}{n+k+1}\frac{(n+k+1)!}{(n-(k+1)!}\frac{2^{k+1}(k+1)!}{(2(k+1))!},
\end{aligned}$$

d'où l'hérédité et le résultat.
En fait le dernier résultat est stupide. Si n est pair, T_n est pair donc $T_n(-x)=T_n(x)$ pour tout x donc en dérivant k fois $(-1)^kT_n^{(k)}(-x)=T_n(x)$, i.e. en évaluant en 1, $T_n(-1)=(-1)^{-k}T_n(1)=(-1)^kT_n(1)=(-1)^{k+n}T_n(1)$ car n est pair. De même si n est impair.

Exercice 34. *Polynômes de Legendre*. ●●○ Pour tout entier naturel n on pose

$$L_n=\frac{n!}{(2n)!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$$

1. Montrer que L_n est un polynôme unitaire de degré n.

Correction

L_n est la dérivée n-ième d'un polynôme de degré $2n$, donc il est de degré n. Son coefficient dominant est celui de la dérivée n-ième de $\frac{n!}{(2n)!}X^{2n}$, i.e. $\frac{n!}{(2n)!}\frac{(2n-n)!}{n!}=1$, donc L_n est bien unitaire.

2. Montrer que

$$\forall Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X],\ \int_{-1}^{1}L_n(t)Q(t)dt=0$$

Correction

Posons $P(X)=(X^2-1)^n$. Soit Q dans $\mathbb{R}[X]$. Montrons par récurrence que pour tout entier k dans $[\![0,n]\!]$,

$$\int_{-1}^{1}P^{(n)}(x)Q(x)dx=(-1)^{n-k}\int_{-1}^{1}P^{(n-k)}(x)Q^{(k)}(x)dx.$$

Initialisation évidente pour $k=0$.
Hérédité. Supposons que pour un certain $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\int_{-1}^{1} P^{(n)}(x)Q(x)dx = (-1)^k \int_{-1}^{1} P^{(n-k)}(x)Q^{(k)}(x)dx.$$

Effectuons une IPP en posant $u'(x) = P^{(n-k)}(x)$, $v(x) = Q^{(k)}(x)$, donc $u(x) = P^{(n-(k+1))}$ et $v'(x) = Q^{(k+1)}(x)$. Donc

$$\int_{-1}^{1} P^{(n-k)}(x)Q^{(k)}(x)dx = \left[P^{(n-(k+1))}Q^{(k)}(x)\right] - (-1)^k \int_{-1}^{1} P^{(n-(k+1))}(x)Q^{(k+1)}(x)dx.$$

Or, -1 et 1 sont des racines de multiplicité n de P, donc si $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $P^{(n-(k+1))}(-1) = P^{(n-(k+1))}(1) = 0$. Donc

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P^{(n-k)}(x)Q^{(k)}(x)dx &= -(-1)^k \int_{-1}^{1} P^{(n-(k+1))}(x)Q^{(k+1)}(x)dx \\ &= (-1)^{k+1} \int_{-1}^{1} P^{(n-(k+1))}(x)Q^{(k+1)}(x)dx,\end{aligned}$$

le résultat est donc prouvé. En particulier,

$$\int_{-1}^{1} P^{(n)}(x)Q(x)dx = (-1)^n \int_{-1}^{1} P^{(0)}(x)Q^{(n)}(x)dx,$$

et donc

$$\int_{-1}^{1} L_n(x)Q(x)dx = (-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{n!}{(2n)!}(x^2-1)^n Q^n(x)dx = 0$$

si Q est dans $\mathbb{R}_{n-1}(X)$. Le résultat est donc démontré.

3. En déduire que L_n possède n racines simples toutes dans $]-1,1[$. On utilisera sans la démontrer la propriété suivante : toute fonction continue positive sur un segment d'intégrale nulle sur ce segment est nulle.

Correction

Supposons que L_n s'annule strictement moins de n fois sur $]-1,1[$. Si L_n garde un signe constant (par exemple $L_n \geqslant 0$, on sait par la question précédente que

$$\int_{-1}^{1} L_n(x)dx = \int_{-1}^{1} L_n \times 1 dx = 0.$$

Or l'intégrale sur un segment d'une fonction positive est nulle si et seulement si cette fonction est nulle, donc L_n serait nulle sur $]-1,1[$, donc L_n s'annulerait une infinité de fois et serait le polynôme nul, impossible.
Supposons que L_n change de signe en $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, avec $r < n$. Supposons de plus que sur $]\alpha_r, 1[$, L_n soit positive. Considérons alors

$$Q(X) = \prod_{k=1}^{r}(X - \alpha_k).$$

Alors Q est du signe de L_n sur chacun des intervalles $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$. De plus, comme $r < n$, $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc $\int_{-1}^{1} L_n(x)Q(x)dx = 0$, et L_nQ est positive sur $]-1,1[$. Donc L_nQ est nulle sur

$]-1,1[$, donc L_nQ est le polynôme nul, donc L_n est le polynôme nul, absurde.
Donc L_n possède n racines dans $]-1,1[$.

Exercice 35. *Polynômes cyclotomiques*. ●●● On définit l'ensemble des racines primitives n-ièmes de l'unité par $\mathcal{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!] \text{ et } k \wedge n = 1\}$.

1. Que vaut
$$\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega)?$$

Correction

Par le cours, on sait que $\displaystyle\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega) = X^n - 1$.

On appelle n-ième polynôme cyclotomique le polynôme
$$\Phi_n(X) = \prod_{\omega \in \mathcal{U}_n} (X - \omega) = \prod_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \wedge n = 1}} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right).$$

2. Soit p un nombre premier. Que vaut $\Phi(p)(X)$?

Correction

Si p est un nombre premier, tout nombre entre 0 et $p-1$ est premier avec p. Donc
$$\prod_{\substack{k \in [\![0,p]\!] \\ k \wedge p = 1}} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{p}}\right) = \prod_{\substack{\omega \in \mathbb{U}_p \\ \omega \neq 1}} (X - \omega) = \frac{X^p - 1}{X - 1} = 1 + X + \cdots + X^{p-1}.$$

3. On veut montrer que
$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X).$$

(i) Soit d un entier divisant n, montrer que toute racine de Φ_d est une racine n-ième de l'unité. Réciproquement, montrer que toute racine n-ième de l'unité est une racine primitive δ-ième de l'unité pour un certain δ divisant n.

Correction

Si ω est une racine de Φ_d, alors $\omega^d = 1$. Or $n = pd$ avec $p \in \mathbb{N}$, donc $\omega^n = \omega^{pd} = (\omega^d)^p = 1$, donc ω est une racine n-ième de l'unité. Réciproquement, si ω est racine n-ième de l'unité, alors soit $d = \min\{k,\ \omega^k = 1\}$. Alors $d|n$: si ce n'était pas le cas, on écrirait $n = dq + r$ avec $0 < r < d$, et $\omega^r = 1$ ce qui contredirait la minimalité de r. Ensuite $\omega^d = 1$, et $\omega \in \mathcal{U}_d$. En effet, si on avait $\omega = e^{\frac{2ik\pi}{d}}$ avec $k \wedge d = r \neq 1$, alors on écrirait $k = ra$, $d = rb$, et donc $kb = ad$, donc $\omega^b = 1$, avec $b < d$, absurde.

On a donc montré que $X^n - 1$ et $\displaystyle\prod_{d|n} \Phi_d(X)$ avaient les mêmes racines.

(ii) Montrer que $X^n - 1$ est à racines simples.

Correction

Cf cours, on connaît la décomposition de $X^n - 1$.

(iii) Montrons que $\prod_{d|n} \Phi_d(X)$ est à racines simples.

- Soient $d \neq \delta$ deux entiers. Montrer que $\mathcal{U}_d \cap \mathcal{U}_\delta = \emptyset$.

Correction

Soit $\omega \in \mathcal{U}_d \cap \mathcal{U}_\delta$. Alors on dispose de k et ℓ tels que $e^{\frac{2ik\pi}{d}} = e^{\frac{2i\ell\pi}{\delta}}$, avec $k < d$ et $\ell < \delta$, donc

$$\frac{k}{d} = \frac{\ell}{\delta},$$

donc $k\delta = d\ell$. Comme $k \wedge d = 1$, $k|\ell$ par le théorème de Gauss. De même, $\delta \wedge \ell = 1$, donc par le théorème de Gauss, $\ell|k$. Donc $k = \ell$, or $k \neq 0$, donc $\delta = d$, absurde !

- En déduire que $\prod_{d|n} \Phi_d(X)$ est à racines simples.

Correction

On en déduit que toutes les racines des Φ_d pour $d|n$ sont deux à deux distinctes, donc le polynôme $\prod_{d|n} \Phi_d$ est scindé à racines simples.

(iv) Conclure.

Correction

On en déduit que les racines de $X^n - 1$ et de $\prod_{d|n} \Phi_d$ sont communes et toutes simples, donc les deux polynômes sont égaux.

4. Soit φ l'indicatrice d'Euler : $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers inférieurs à n et premiers avec n. Montrer que $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

Correction

En égalisant les degrés, on obtient $n = \sum_{d|n} \mathrm{Card}(\mathcal{U}_d) = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

Indications

1.
  1. Utiliser le théorème de Rolle.
  2. Utiliser le fait qu'un polynôme est à racines simples ssi il est premier avec son polynôme dérivé.
  3. Utiliser le théorème de Rolle et compter les racines de P' avec multiplicité.

2.
  1. Penser à distinguer les cas $a = b$ et $a \neq b$. Le premier cas se résout avec une formule de Taylor. Le second se résout à la main, en adaptant la preuve du « reste de la division euclidienne par $X - \alpha$ »
  2. Utiliser le résultat précédent et l'exponentielle complexe.

4. L'idée fondamentale est de penser aux **relations coefficients-racines** ! Dans le premier système, on a facilement la somme des racines et, si l'on multiplie la dernière équation par xyz, on a une relation entre le produit des racines et la quantité $xy + yz + zx$! Enfin, remarquer ce que vaut $x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx)$.

5. **1.** On pourra remarquer que $\cos(n\theta)$ est la partie réelle de $(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n$.
   2. Utiliser le fait que deux polynômes égaux en une infinité de points sont égaux.
   3. Utiliser la formule trouvée en 1.
   4. Écrire $\cos((n+1)\theta)$ en fonction de $\cos(n\theta)$ et $\cos((n+2)\theta)$.
   5.
   6. Regarder les points d'annulation de $\cos(n\theta)$.

7. Conseil important : référez-vous au chapitre d'arithmétique des entiers ! L'idée est que tout a déjà été fait dans ce chapitre !

8. **1.** Commencer à factoriser comme on voudrait et utiliser l'identité de Bernoulli.
   2. Utiliser l'algorithme d'Euclide.

10. **1.** Lagrange
   2. Lagrange
   3. Remarquer que pour tout z dans $\mathbb{U}$, $|P(z)|^2 = 1$. On aura intérêt à considérer, si P est de degré n, le polynôme $Q(X) = P(X)X^n\overline{P}\left(\frac{1}{X}\right)$, en s'assurant que l'on définit bien un polynôme de cette manière.

11. Faire un raisonnement sur le degré.

12. Faire le calcul comme indiqué en cours. Ou utiliser la formule de Taylor.

13. Revoir ce qu'est l'ensemble des unités d'un anneau, puis faire un raisonnement sur le degré.

14. Bien sûr, il ne s'agit pas de résoudre les équations différentielles comme au chapitre 7 ! Regarder le degré, regarder le coefficient dominant, les coefficients constants, etc !

15. Reconnaître le coefficient d'ordre k du produit $(X+1)^n(X+1)^p$.

16. Le même que le précédent, en plus dur !
   1. Dériver la somme, vous devriez trouver ce qu'il faut !
   2. P fait penser à une somme géométrique... essayez d'écrire ce que vaut $XP(X) = ((X+1)-1)P(X)$. Puis, dériver cette expression $k+1$ fois !

17. Poser la division euclidienne et chercher une CNS pour que ce reste soit nul.

18. Résoudre un système linéaire !

20. Raisonner sur les racines, ou bien la dérivabilité.

21. Écrire un système d'équations que doit vérifier α.

22. Inspirez-vous fortement de l'exercice 4 !

23. Prendre ω une racine de P. Si elle est de module $\leqslant 1$, c'est bon. Sinon, utiliser le fait que $|\omega^k| \leqslant |\omega|^n$ pour tout $k \leqslant n$.

24. Montrer que P est nul ou de la forme $X^a(X-1)^a$.

25. Reconnaître des racines de l'unité.

26. Utiliser la décomposition obtenue en question 2, l'évaluer en 1, en $e^{-2i\theta}$...

27. Utiliser l'algorithme d'Euclide ou une relation de Bézout.

28. Utiliser les racines !

29. De même, déterminer les racines du polynôme qui est censé diviser l'autre !

31. Exercice fait en arithmétique des entiers relatifs. Utiliser des relations de Bézout.

32. Utiliser l'expression vue en cours des polynômes de Lagrange.

33. **1.**
   2. Faire une récurrence.
   3. Montrer que $||T_n||_\infty \leqslant 1$ puis que cette quantité est atteinte.
   4. Faire une récurrence
   5. (i)
   (ii) Résoudre l'équation du second degré vérifiée par r.
   6.

 nlaillet.math@gmail.com

7. Faire une récurrence

34.
1. Utiliser un calcul de dérivée n-ième.
2. Faire des IPP
3. Question presque faite dans le chapitre de dérivabilité.

35.
1. Utiliser que tout nombre de $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$ est premier avec p.
2. (i) Utiliser proprement les racines de l'unité.
   (ii)
   (iii) Utiliser le théorème de Gauss
   (iv)
3. Utiliser les degrés.