MPSI 1

Mathématiques
DS 06

Samedi 7 février – 8h-12h

- Durée : 4 heures.
  - Prenez **10 minutes** pour lire le sujet en entier et décider de la stratégie que vous adopterez.
  - Prenez **10 minutes** au moins à la fin des 4 heures pour vous relire !
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème.
- **Consignes de présentations.**
  - Les pages doivent être **numérotées.**
  - Les résultats doivent être **mis en valeur** (encadrés ou soulignés).
  - Les questions doivent être **numérotées**. Une question non numérotée, c'est une question potentiellement non corrigée.
  - Les questions doivent être **faites dans l'ordre** : si vous admettez une question, laissez de la place à l'endroit où elle est censée être pour y revenir ensuite. Changez de copie ou de page quand vous changez de grande partie.
- À tout moment, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour pouvoir continuer : il suffit de le préciser clairement sur la copie.
- Si vous voyez ce qui semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur la copie.
- Laissez de la place dans une marge à gauche pour pouvoir noter plus facilement le devoir.
- Une réponse fausse, si elle ne laisse pas paraître de calculs intermédiaires, compte 0 points ; avec calculs intermédiaires elle peut rapporter quelques points.

♫ Bon courage ! ♫

Exercice 1. *De l'asymptotique, comme promis !.*

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\dfrac{1}{1-x^2}\ln(\cos(x))$.

Correction

On calcule :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x^2}\ln(\cos(x)) &\underset{x\to 0}{=} \left(1+x^2+o(x^2)\right)\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \left(1+x^2+o(x^2)\right)\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \left(1+x^2+o(x^2)\right)\left(-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^4}{2}+o(x^4)\\
&\underset{x\to 0}{=} \boxed{-\frac{x^2}{2}-\frac{7x^4}{12}.}
\end{aligned}$$

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en π de $\dfrac{\sin(x)}{x}$.

Correction

On écrit $x=\pi+h$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x)}{x} &= \frac{\sin(\pi+h)}{\pi+h}\\
&= \frac{1}{\pi}\frac{-\sin(h)}{1+\frac{h}{\pi}}\\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{\pi}\left(-h+\frac{h^3}{6}+o(h^3)\right)\left(1-\frac{h}{\pi}+\frac{h^2}{\pi^2}+o(h^2)\right)\\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{\pi}\left(-h+\frac{h^2}{\pi}-\frac{h^3}{\pi^2}+\frac{h^3}{6}\right)+o(h^3)\\
&\underset{h\to 0}{=} \boxed{-\frac{1}{\pi}h+\frac{1}{\pi^2}h^2+\left(\frac{1}{6\pi}-\frac{1}{\pi^3}\right)h^3+o(h^3).}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{\frac{\sin(x)}{x} \underset{x\to\pi}{=} \frac{1}{\pi}(x-\pi)+\frac{1}{\pi^2}(x-\pi)^2+\left(\frac{1}{6\pi}-\frac{1}{\pi^3}\right)(x-\pi)^3+o((x-\pi)^3).}$$

3. Montrer que $f : x \mapsto \left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ définie sur $]0,\pi[$ se prolonge par continuité en 0.
Étudier la dérivabilité en 0. Dans le cas où la fonction est dérivable, déterminer la position relative de la courbe et de sa tangente.

Correction

Il s'agit de déterminer un développement limité à l'ordre 2 de f en 0. On écrit déjà que

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)\right)\right). \end{aligned}$$

Or,

$$\ln\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)\right) = -\frac{x^2}{6}+o(x^3).$$

On en déduit que

$$\frac{4}{x}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = -\frac{x}{6}+o(x^2),$$

d'où

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x}{6}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{36}+o(x^2),$$

donc f est prolongeable par continuité en 0, $\boxed{\text{en posant } f(0)=1}$. Elle est dérivable en 0, $\boxed{\text{de dérivée égale à } -\frac{1}{6}}$.

Enfin, elle est localement au-dessus de sa tangente en 0, car $f(x)-\left(1-\frac{2x}{3}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{72}x^2$.

4. Soit $g(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+1}$. Déterminer l'équation de l'asymptote à la courbe de g en $+\infty$ et donner la position relative de la courbe de g par rapport à cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

Correction

Cette fonction est gentille, on peut directement faire un développement asymptotique. On écrit que

$$\begin{aligned} g(x) &= e^{\frac{1}{x}}x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \\ &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(1+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} x+1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right), \end{aligned}$$

donc la courbe de g a pour asymptote en $+\infty$ $\boxed{\text{la droite d'équation } y=x+1}$, et, comme $g(x)-(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x} > 0$, on en déduit que la courbe de g est $\boxed{\text{au-dessus de sa tangente en } +\infty.}$

Problème : Autour de la méthode de Newton

Le but de ce problème est d'étudier une méthode d'analyse numérique utilisée pour déterminer le zéro d'une fonction : la méthode de Newton. Dans la partie A, nous établissons deux résultats utiles pour la partie B, dans laquelle nous étudions la méthode de Newton pour des fonctions et des polynômes. Dans la partie C, nous en voyons une adaptation pour les matrices. Les parties B et C sont largement indépendantes.

A. Deux résultats d'analyse

A-I. Critère de D'Alembert

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0,1[$. Démontrer que pour tout α dans $]\ell,1[$, il existe $C>0$ tel que $a_n \leqslant C\alpha^n$ à partir d'un certain rang. En déduire que pour tout β dans $]\ell,1[$, $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\beta^n)$.

Correction

Soit $\alpha \in]\ell,1[$. Comme $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell < \alpha$, on en déduit que l'on dispose de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha$.

On en déduit, par positivité de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que pour tout $n \geqslant n_0$, $a_{n+1} \leqslant \alpha a_n$, d'où, par récurrence immédiate,

$$\boxed{a_n \leqslant \alpha^{n-n_0} a_{n_0} = C\alpha^n, \text{ en posant } C = \frac{a_{n_0}}{\alpha^{n_0}}.}$$

Si $\beta \in]\ell,1[$, on prend $\alpha \in]\ell,\beta[$. Alors on dispose de $C>0$ tel que, à partir d'un certain rang, $a_n \leqslant C\alpha^n$, d'où $0 \leqslant \dfrac{a_n}{\beta^n} \leqslant C\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui signifie exactement que $\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\beta^n)}$.

A-II. Égalité de Taylor-Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I. Soient $a<b$ deux réels de I. Soit A le réel défini par la relation

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}A = f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

Soit φ la fonction définie par, pour tout x dans I,

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}A.$$

2. Calculer $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ et en déduire qu'il existe c dans $]a,b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Correction

On calcule

$$\varphi(a) = f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(x) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}A = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}A - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}A = 0,$$

et
$$\varphi(b) = f(b) - f(b) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-b)^k}{k!} f^{(k)}(b) - \frac{(b-b)^{n+1}}{(n+1)!} A = 0.$$
Ainsi, $\varphi(a) = \varphi(b)$. La fonction φ étant continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, on en déduit, par le théorème de Rolle, qu'il existe $\boxed{c \text{ dans }]a, b[\text{ tel que } \varphi'(c) = 0.}$

Mais, pour tout x dans $]a, b[$,
$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= -f'(x) + \sum_{k=1}^{n} k \frac{(b-x)^{k-1}}{k!} f^{(k)}(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) + \frac{(n+1)(b-x)^n}{(n+1)!} A \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!} A \\
&= -\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!} A.
\end{aligned}$$
Ainsi, comme $\varphi'(c) = 0$, on en déduit que
$$\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) = \frac{(b-x)^n}{n!} A,$$
c'est-à-dire que
$$f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c),$$
donc que
$$\boxed{f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.}$$

3. En déduire notamment que si f est de classe $\mathscr{C}^2$, il existe $c \in]a, b[$ tel que
$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(c)}{2} (b-a)^2.$$

Correction

On applique juste la formule pour $n = 1$!

B. Méthode de Newton pour les fonctions

B-I. Premières propriétés

Soit f une fonction réelle, dérivable sur un intervalle I, s'annulant en un point a. On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 \in \mathrm{I}$ et, pour tout n dans $\mathbb{N}$, x_{n+1} est le point d'intersection de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_n et de l'axe des abscisses.

4. Démontrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par le procédé ci-dessus vérifie la relation de récurrence
$$\forall k \in \mathbb{N},\ x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\ \text{ et illustrer la méthode !}$$

Correction

Soit k dans $\mathbb{N}$. L'équation de la tangente à la courbe de f en x_k est

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$

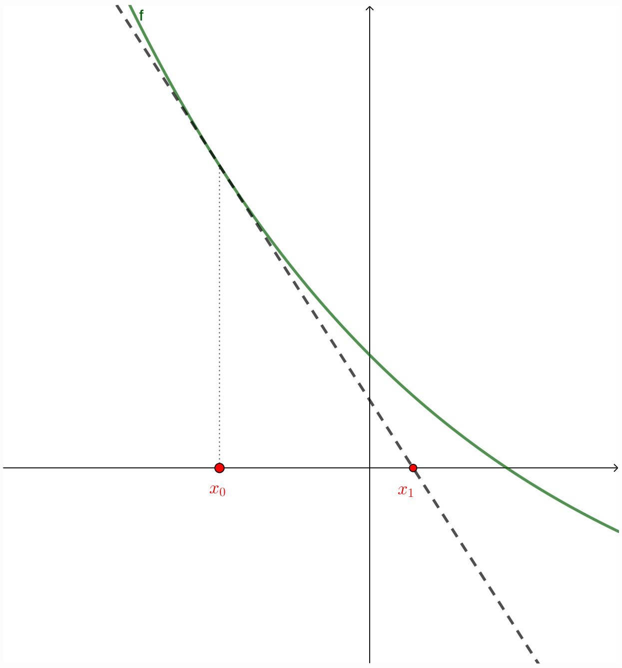
Ainsi, le point x_{k+1} satisfait la relation

$$0 = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k),$$

d'où

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

On a ainsi



5. À titre d'exemple, donner l'expression du terme général de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ quand $f : x \mapsto x^2$. Vérifier qu'une telle suite converge bien vers 0, quel que soit le réel x_0.

Correction

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. La relation de récurrence de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ s'écrit alors

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2}{2x_k} = \frac{x_k}{2}.$$

Ainsi, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, donc converge vers 0.

6. Démontrer que si $a \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \frac{1}{x} - a$, alors pour tout k dans $\mathbb{N}$, $x_{k+1} = x_k(2 - ax_k)$.

Correction

Il s'agit juste d'un calcul. On écrit

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\frac{1}{x_k} - a}{-\frac{1}{x_k^2}} = x_k + x_k^2\left(\frac{1}{x_k} - a\right) = 2x_k - ax_k^2 = x_k(2 - ax_k).$$

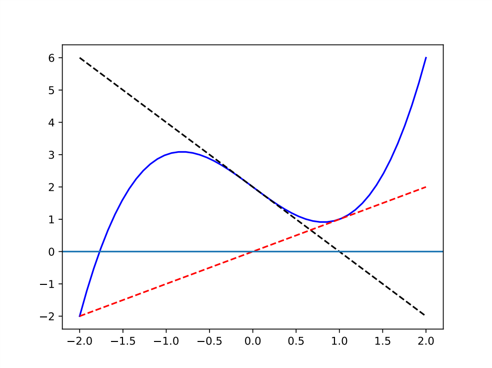
7. Démontrer que si $f : x \mapsto x^3 - 2x + 2$ et $x_0 = 0$, alors la méthode de Newton ne converge pas. *On fera un dessin illustrant la situation.*

Correction

Remarquons que $x_1 = 0 - \dfrac{2}{-2} = 1$ et que

$$x_2 = 1 - \frac{1 - 2 + 2}{3 - 2} = 0.$$

Ainsi, par récurrence immédiate, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $x_{2n} = 0$ et $x_{2n+1} = 1$. Ainsi, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. On le remarque en traçant le graphe de la fonction



B-II. Convergence de la méthode de Newton

On suppose ici que $\mathrm{I} = [a, b]$ où (a, b) sont deux réels tels que $a < b$. On suppose ici que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$, vérifiant

- $f(a) < 0$,
- $f(b) > 0$,
- $\forall x \in [a, b],\ f'(x) > 0$,
- $\forall x \in [a, b],\ f''(x) > 0$.

8. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]a, b[$, que l'on notera c.

Correction

f est continue sur $[a, b]$, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, et f est strictement croissante sur $[a, b]$ car sa dérivée y est strictement négative. Donc, d'après le théorème de la bijection (ou le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones), l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution dans $]a, b[$.

On définit maintenant, pour tout x de $[a, b]$, $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

9. Démontrer que pour tout x dans $[a, b]$, il existe α_x compris entre x et c tel que

$$g(x) - c = \frac{1}{2}\frac{f''(\alpha_x)}{f'(x)}(x-c)^2.$$

Correction

Soit x dans $[a, b]$. Par l'égalité de Taylor-Lagrange entre x et c, on dispose de α_x entre x et c tel que

$$0 = f(c) = f(x) + (x-c)f'(x) + \frac{f''(\alpha_x)}{2}(x-c)^2.$$

Ainsi,

$$g(x) - c = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - c = \frac{-(c-x)f'(x) - f(x)}{f'(x)} = \frac{f''(\alpha_x)}{2f'(x)}(x-c)^2.$$

On définit alors, comme en première partie, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = g(x_n). \end{cases}$$

10. Montrer que g est $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$, et déterminer les variations de g.

Correction

On suppose que f' ne s'annule pas sur $[a, b]$ donc g est bien définie et $\mathscr{C}^1$ par les théorèmes généraux. Sa dérivée est alors, pour tout x de $[a, b]$,

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f(x)^2}.$$

Or, $\forall x \in [a, b]$, $\dfrac{f''(x)}{f(x)^2} > 0$, et f change de signe une fois en c. On en déduit que g est décroissante sur $[a, c]$ et croissante sur $[c, b]$.

11. Montrer que si $x_0 \geqslant c$, alors (x_n) est monotone et converge vers c. *On a ainsi démontré une convergence* ***globale*** *de la méthode de Newton.*

Correction

Montrons que pour tout entier naturel n, $x_n \geqslant x_{n+1} > c$. **Initialisation.** $x_0 = a \geqslant c$, et $x_1 = g(x_0)$, donc, par l'étude des variations de g, $x_1 \geqslant c$. De plus, comme $x_0 = a$, $x_1 = x_0 - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$. Comme $f(a) < 0$ et $f'(a) > 0$, $x_1 < x_0$. D'où l'initialisation.
Hérédité. Soit n dans $\mathbb{N}$ tel que $x_n \geqslant x_{n+1} > c$. Alors

$$x_{n+1} - x_n = g(x_n) - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Or $f(x_n) \geqslant 0$ car $x_n \geqslant c$ et $f'(x_n) < 0$, donc $x_{n+1} - x_n \leqslant 0$. De plus, g est décroissante sur $[a, c]$, croissante sur $[c, b]$, de minimum atteint en c et égal à $g(c) = c$. Donc $g(x_n) \geqslant c$, i.e. $x_{n+1} \geqslant c$. Donc $x_0 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant c$.
Décroissante et minorée, (x_n) converge. Notons ℓ sa limite. Par continuité de g, ℓ vérifie $g(\ell) = \ell$, i.e. $\ell - \dfrac{f(\ell)}{f'(\ell)} = \ell$, i.e. $f(\ell) = 0$. Or f s'annule en un unique point, donc $\ell = c$.

12. Démontrer que, dans ce cas,
$$x_{n+1} - c \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}(x_n - c)^2 \frac{f''(c)}{f'(c)}.$$
En déduire que pour tout β dans $]0,1[$, $x_n - c \underset{n\to+\infty}{=} o(\beta^n)$.

Correction

On sait que $x_{n+1} - c = g(x_n) - c$. Par la question 9., on dispose de α_n dans $[x_n, c]$ tel que
$$g(x_n) - c = \frac{1}{2}\frac{f''(\alpha_n)}{f'(x_n)}(c - x_n)^2.$$
Mais $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} c$, donc, par encadrement, $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} c$ donc, par continuité de f' et f'', $f'(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f'(c)$ et $f''(\alpha_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f''(c)$. D'où
$$\boxed{x_{n+1} - c \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(c)}{f'(c)}(c - x_n)^2.}$$
On en déduit en particulier que $(x_n - c)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs vérifiant
$$\frac{x_{n+1} - c}{x_n - c} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(c)}{f'(c)}(c - x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
donc, $\boxed{\text{par le critère de D'Alembert, pour tout } \beta \text{ dans }]0,1[,\ x_n - c \underset{n\to+\infty}{=} o(\beta^n).}$

B-III. Le cas polynomial

Cette partie est plus technique et sur un chapitre plus récent. N'hésitez pas à aller voir du côté des matrices si vous le préférez.

Dans cette partie, on considère la méthode de Newton appliquée à un polynôme P :
$$P(X) = \prod_{k=1}^{r}(X - \lambda_i)^{m_i}.$$
où $\lambda_1 < \cdots < \lambda_r$. On suppose $\deg(P) \geqslant 3$.

13. Démontrer que les racines de P' et celles de P'' sont toutes dans $[\lambda_1, \lambda_r]$.

Correction

C'est du cours de jeudi, donc très récent, je sais !
On sait déjà que, pour tout i, λ_i est racine de P' de multiplicité $m_i - 1$.
De plus, par applications successives du théorème de Rolle, on dispose de $(\mu_1, \dots, \mu_{r-1})$ des réels vérifiant $\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \cdots < \mu_{r-1} < \lambda_r$ et tels que pour tout i dans $[\![1, r-1]\!]$, on ait $P'(\mu_i) = 0$.
On compte alors le nombre de racines de P' trouvées (avec multiplicité). Il y en a :
$$\sum_{i=1}^{r}(m_i - 1) + r - 1 = \left(\sum_{i=1}^{r} m_i\right) - 1 = \deg(P) - 1 = \deg(P'),$$
donc P' est scindé sur $\mathbb{R}$ et toutes ses racines sont dans $[\lambda_1, \dots, \lambda_r]$.
De même, P'' est scindé sur $\mathbb{R}$ et toutes ses racines sont dans $[\lambda_1, \dots, \lambda_r]$.

14. En déduire que P est strictement positive, strictement croissante et strictement convexe sur $]\lambda_r, +\infty[$.

Correction

La stricte positivité de P est évidente. On sait que P' et P'' ne s'annule pas sur $]\lambda_r, +\infty[$. Par continuité de P' et P'' et par le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que P' et P'' sont de signe constant sur $]\lambda_r, +\infty[$.
Comme $P'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $P''(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (car P est de degré au moins 3), on en déduit que P' et P'' sont strictement positifs, ce qui assure que P est strictement convexe et strictement croissant sur $[\lambda_r, +\infty[$.

On considère alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 > \lambda_r$ et, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$, où $g : x \mapsto x - \dfrac{P(x)}{P'(x)}$.

15. Justifier que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_r$.

Correction

On est alors exactement dans le cadre d'étude de la question 11, et on a donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_r$.

On va maintenant étudier plus finement la vitesse de convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

16. Démontrer que pour tout x différent de $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, on a

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{x - \lambda_i}.$$

Correction

On sait, par le cours, que

$$P'(x) = \sum_{i=1}^{r} m_i (x-\lambda_i)^{m_i - 1} \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}} (x-\lambda_j)^{m_j},$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{P'(x)}{P(x)} &= \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i (x-\lambda_i)^{m_i-1} \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}}(x-\lambda_j)^{m_j}}{P(x)} \\ &\boxed{= \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{x-\lambda_i}.}\end{aligned}$$

17. En déduire que, pour $x > \lambda_r$,

$$g'(x) = 1 - \left(\sum_i \frac{m_i}{x-\lambda_i}\right)^{-2} \left(\sum_i \frac{m_i}{(x-\lambda_i)^2}\right) \underset{x\to\lambda_r}{\longrightarrow} 1 - \frac{1}{m_r}.$$

Correction

On calcule encore ! On sait que

$$\begin{aligned} g(x) &= x - \frac{1}{\frac{P'(x)}{P(x)}} \\ &= x - \frac{1}{\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{x-\lambda_i}}. \end{aligned}$$

On en déduit donc que pour tout $x > \lambda_r$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 + \frac{-\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{(x-\lambda_i)^2}}{\left(\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{x-\lambda_i}\right)^2} \\ &= 1 - \frac{\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{(x-\lambda_i)^2}}{\left(\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{x-\lambda_i}\right)^2}. \end{aligned}$$

Mais,

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{(x-\lambda_i)^2} \underset{x\to\lambda_r}{\sim} \frac{m_r}{(x-\lambda_r)^2},$$

et

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{x-\lambda_i} \underset{x\to\lambda_r}{\sim} \frac{m_r}{x-\lambda_r},$$

d'où

$$\frac{\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{(x-\lambda_i)^2}}{\left(\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{x-\lambda_i}\right)^2} \underset{x\to\lambda_r}{\sim} \frac{\frac{m_r}{(x-\lambda_r)^2}}{\frac{m_r^2}{(x-\lambda_r)^2}} \underset{x\to\lambda_r}{\longrightarrow} \frac{1}{m_r},$$

d'où $\boxed{g'(x) \underset{x\to\lambda_r}{\longrightarrow} 1 - \frac{1}{m_r}.}$

18. En déduire que $\frac{x_{n+1}-\lambda_r}{x_n-\lambda_r} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \frac{1}{m_r}$, puis que, pour tout β dans $\left]1 - \frac{1}{m_r}, 1\right[$,

$$x_n - \lambda_r \underset{n\to+\infty}{=} o(\beta^n).$$

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que

$$x_{n+1} - \lambda_r = g(x_n) - g(\lambda_r),$$

donc, par le théorème des accroissements finis, on dispose de $y_n \in]\lambda_r, x_n[$ tel que

$$x_{n+1} - \lambda_r = g'(y_n)(x_n - \lambda_r) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(1 - \frac{1}{m_r}\right)(x_n - \lambda_r),$$

(étant donné que $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_r$) d'où le résultat désiré. Ensuite, la règle de D'Alembert permet de conclure.

C. Méthode de Newton-Schulz pour calculer l'inverse d'une matrice

Le but de cette partie est de comprendre comment adapter la méthode de Newton, a priori une méthode d'analyse, à des objets beaucoup plus algébriques, à savoir les matrices !

C-I. Une norme sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. On pose, pour tout M dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\|M\|_{n,p} = \sqrt{\mathrm{Tr}(M^T M)}$ (où M^T désigne la transposée de M et Tr désigne la trace). Si n et p sont fixés et qu'il n'y a pas d'ambiguïté, on la note simplement $\|M\|$.

On veut démontrer que l'application $M \mapsto \|M\|$ est une **norme** sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'elle vérifie les hypothèses suivantes :

a. (positivité) $\forall M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\|M\| \geqslant 0$,

b. (homogénéité) $\forall M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda M\| = |\lambda|.\,\|M\|$,

c. (séparation) $\forall M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\|M\| = 0 \Leftrightarrow M = 0_n$,

d. (inégalité triangulaire) $\forall (M, N) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2$, $\|M + N\| \leqslant \|M\| + \|N\|$.

19. Démontrer que les propriétés **a.**, **b.** et **c.** sont vraies.

Correction

On remarque que $\|M\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} m_{ij}^2$.

Soit $M = (m_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors

a. $\|M\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} m_{ij}^2} \geqslant 0$.

b. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\|\lambda M\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} (\lambda m_{ij})^2} = \sqrt{\lambda^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} m_{ij}^2} = |\lambda|.\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} m_{ij}^2} = |\lambda|.\,\|M\|$$

c. Supposons que $M = 0$. Alors $\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} m_{ij}^2} = 0$.

Réciproquement, si $\|M\| = 0$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} m_{ij}^2 = 0$. Or, pour tout (i, j), $m_{ij}^2 \geqslant 0$, et, une somme de termes positifs étant nulle ssi chaque terme est nul, on en déduit que $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, $m_{ij} = 0$.

On a donc démontré les propriétés a., b. et c.

Pour démontrer l'inégalité triangulaire (propriété **d.**), on va démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (U, V) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2,\ \mathrm{Tr}(U^T V) \leqslant \|U\|\,\|V\|\,.$$

On considère la fonction $P : x \mapsto \|U + xV\|^2$.

20. Exprimer P comme un polynôme de degré 2 en x.

Correction

Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} P(x) &= \|U+xV\|^2 \\ &= \mathrm{Tr}((U+xV)^T(U+xV)) \\ &= \mathrm{Tr}(U^TU + xU^TV + xV^TU + x^2V^TV) \text{ par linéarité de la transposition} \\ &= \mathrm{Tr}(U^TU) + x\mathrm{Tr}(U^TV) + x\mathrm{Tr}(V^TU) + x^2\mathrm{Tr}(V^TV) \text{ par linéarité de la trace} \\ &= \|U\|^2 + 2x\mathrm{Tr}(U^TV) + x^2\|V\|^2, \end{aligned}$$

la dernière égalité venant du fait que $\mathrm{Tr}(V^TU) = \mathrm{Tr}((V^TU)^T) = \mathrm{Tr}(U^TV)$ (la trace d'une matrice égale la trace de sa transposée.
On a ainsi exprimé P comme un polynôme de degré 2 en x, en supposant V non nul (sinon, de toute manière, l'inégalité est triviale).

21. En étudiant le signe de P, en déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Correction

Comme $P(x) = \|U+xV\|^2$, P est positif sur $\mathbb{R}$. Ainsi son discriminant est négatif ou nul. On en déduit que

$$4\mathrm{Tr}(U^TV)^2 - 4\|U\|^2\|V\|^2 \leqslant 0,$$

i.e. que $\mathrm{Tr}(U^TV)^2 \leqslant \|U\|^2\|V\|^2$, soit $|\mathrm{Tr}(U^TV)| \leqslant \|U\|\,\|V\|$. Donc, a fortiori,

$$\boxed{\mathrm{Tr}(U^TV) \leqslant \|U\|\,\|V\|.}$$

22. En déduire l'inégalité triangulaire.

Correction

Soient alors A et B dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Calculons

$$\|A+B\|^2 = \mathrm{Tr}((A+B)^T(A+B)) = \|A\|^2 + 2\mathrm{Tr}(A^TB) + \|B\|^2,$$

par le même raisonnement qu'à la question précédente. Mais, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\mathrm{Tr}(A^TB) \leqslant \|A\|\,\|B\|$, d'où

$$\|A+B\|^2 \leqslant \|A\|^2 + 2\|A\|\,\|B\| + \|B\|^2 = (\|A\| + \|B\|)^2,$$

d'où $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$ étant donné que toutes les quantités sont positives.

23. Soient A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$. Démontrer que si $(A_1, \dots, A_n)$ sont les colonnes de A et $(B_1, \dots, B_n)$ sont celles de B, alors $\|AB\|_{n,n}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Tr}(A_i^TB_j)^2$.

Correction

On calcule :

$$A^T = \begin{pmatrix} A_1^T \\ A_2^T \\ \vdots A_n^T \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_n \end{pmatrix}.$$

Donc, par produit par blocs, le terme (i,j) de AB est $A_i^T \times B_j$ (qui est bien dans $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$, donc dans $\mathbb{R}$. Ainsi, par définition de $\|\cdot\|$,

$$\|AB\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(A_i^T \times B_j)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Tr}(A_i^T \times B_j)^2,$$

car la trace d'une matrice de $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ est l'unique valeur de cette matrice.

24. En déduire que lorsque l'on considère des matrices carrées, la norme $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre, c'est-à-dire que

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|\,.$$

Correction

Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$. On reprend les notations de la question précédente.
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à la norme $\|\cdot\|_{n,1}$,

$$\mathrm{Tr}(A_i^T B_j) \leqslant \|A_i\|_{n,1}^2\,\|B_j\|_{n,1}^2\,.$$

Ainsi,

$$\|AB\| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\|A_i\|_{n,1}^2\,\|B_j\|_{n,1}^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}\|A_i\|_{n,1}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\|B_j\|_{n,1}^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ki}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_{kj}^2\right)\boxed{=\|A\|^2\,\|B\|^2}\,,$$

d'où l'inégalité désirée !

25. Démontrer, en cherchant un exemple pour $n=2$, que l'on a en général **pas** d'égalité entre $\|AB\|$ et $\|A\|\,\|B\|$.

Correction

Si l'on considère $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, alors $AB = 0$ mais $\|A\|\,\|B\| = 2$.

C-II. Convergence d'une suite de matrices

Nous sommes désormais armés pour parler de la convergence d'une suite de matrices. On dit qu'une suite de matrices $(X_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ **converge** vers une matrice A si elle converge « coefficient par coefficient », c'est-à-dire que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ [X_k]_{ij} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} [A]_{ij}.$$

On s'autorise alors la notation

$$X_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} A.$$

26. **Un exemple.** Démontrer que si $M = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}$, alors la suite $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice dont on précisera les coefficients.

Correction

Déjà, comme M est triangulaire supérieure, toutes ses puissances sont triangulaires supérieures. De plus, on sait que les coefficients de la diagonale de M^k seront 1^k et $\frac{1}{2^k}$. On sait donc que pour tout k dans $\mathbb{N}$, il existe a_k tel que

$$M^k = \begin{pmatrix} 1 & a_k \\ 0 & 1/2^k \end{pmatrix}$$

Mais alors, si $k \in \mathbb{N}$,

$$M^{k+1} = M \times M^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a_k \\ 0 & 1/2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_k + \frac{1}{2^k} \\ 0 & \frac{1}{2^{k+1}} \end{pmatrix}$$

Ainsi, $a_{k+1} = a_k + \frac{1}{2^k}$ donc, comme $a_0 = 0$, par récurrence immédiate, on en déduit que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ a_k = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2^i} = \frac{1 - \frac{1}{2^k}}{1 - \frac{1}{2}} = 2.\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 2}$$

$\boxed{\text{Donc } (M^k) \text{ converge et sa limite égale } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.}$

27. Démontrer que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ converge vers A si, et seulement si $\|X_k - A\| \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Correction

Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ converge vers A. Alors

$$\|X_k - A\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [X_k - A]_{ij}^2.$$

Or, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $[X_k - A]_{ij}^2 = ([X_k]_{ij} - [A]_{ij})^2 \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc par somme (finie, indépendante de k) sur les limites, $\|X_k - A\|^2 \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\|X_k - A\| \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Alors

$$([X_k]_{ij} - [A]_{ij})^2 = [X_k - A]_{ij}^2 \leqslant \sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} [X_k - A]_{st}^2 = \|X_k - A\|^2 \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc, par encadrement, $([X_k]_{ij} - [A]_{ij})^2 \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui signifie que $[X_k]_{ij} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} [A]_{ij}$, i.e. $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers A.

On admet les propositions suivantes : si $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de matrices $n \times n$ convergeant respectivement vers A et B, alors

$$X_k + Y_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} A + B \text{ et } X_k Y_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} A \times B.$$

C-III. Une suite de matrices

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On se demande si la relation trouvée à la question 6. peut nous permettre de calculer l'inverse de A. On pose alors

$$X_0 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ X_{k+1} = X_k \times (2\mathrm{I}_n - AX_k).$$

Notre but est de démontrer que, sous certaines conditions, la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers A^{-1}.
On pose $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite des erreurs, i.e.

$$\forall k \in \mathbb{N},\ W_k = \mathrm{I}_n - X_k A.$$

Plus W_k est petit, plus $X_k A$ est proche de I_n, donc plus X_k est proche de A^{-1}.

28. Démontrer que $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence : $\forall k \in \mathbb{N},\ W_{k+1} = W_k^2$. En déduire une expression de W_k pour tout k dans $\mathbb{N}$.

Correction

Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$W_{k+1} = \mathrm{I}_n - X_{k+1}A = \mathrm{I}_n - 2X_kA + X_kAX_kA = (\mathrm{I}_n - X_kA)^2 = W_k^2,$$

On en déduit par récurrence immédiate que pour tout k dans $\mathbb{N}$,

$$W_k = W_0^{2^n}.$$

29. En déduire que la méthode de Newton pour les matrices converge **localement**, c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout X_0 tel que $\|\mathrm{I}_n - X_0A\| \leqslant \varepsilon$, alors la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers A^{-1}.

Correction

On en déduit que pour tout k dans $\mathbb{N}$,

$$\|W_k\| \leqslant \|W_0\|^{2^k}$$

(car la norme $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre). Ainsi, si $\|W_0\| < 1$, alors on en déduit que $\|W_0\|^{2^k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, i.e. $AX_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{I}_n$, i.e.

$$\boxed{X_k = X_kA \times A^{-1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} A^{-1}.}$$

D'où le résultat !

C-IV. Un cas de convergence

Dans cette dernière section, on suppose que A est une matrice à diagonale strictement dominante, c'est-à-dire que

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ |a_{ii}| > \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} |a_{ij}|.$$

30. Démontrer que A est inversible. *On pourra utiliser qu'une matrice est inversible si et seulement si $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $AX = 0 \Rightarrow X = 0$.*

Correction

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $AX = 0_{n,1}$.

Soit i_0 tel que $|x_{i_0}| = \max\{|x_i|, 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Alors en écrivant la ligne i_0 de la relation $AX = 0$, on obtient $\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}x_j = 0$, donc $a_{i_0,i_0}x_{i_0} = -\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i_0}} a_{i_0,j}x_j$, donc

$$|a_{i_0,i_0}||x_{i_0}| \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i_0}} |a_{i_0,j}||x_j| \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\ neq i_0}} |a_{i_0,j}||x_{i_0}|,$$

ce qui est impossible si $|x_{i_0}| \neq 0$. Donc $|x_{i_0}| = 0$, donc $X = 0$ donc A est inversible.

31. On suppose A à diagonale **fortement dominante**, c'est-à-dire que

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ |a_{ii}| > n \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}} |a_{ij}|.$$

Démontrer qu'en prenant

$$X_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & & (0) \\ & \frac{1}{a_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix},$$

alors la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie comme précédemment converge vers A^{-1}.

Correction

Évaluons la norme de $\mathrm{I}_n - AX_0$: Déjà,

$$AX_0 = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{a_{11}} & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & \frac{a_{22}}{a_{22}} & \frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & \dots & \frac{a_{nn}}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

donc

$$\mathrm{I}_n - AX_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$\|\mathrm{I}_n - AX_0\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}} \frac{a_{ij}^2}{a_{ii}^2}.$$

Mais, par caractère fortement dominant, on en déduit que pour tous i et j dans $[\![1, n]\!]$, $|a_{ij}| \leqslant |a_{ii}|$. Ainsi, $\dfrac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \leqslant 1$, donc $\dfrac{a_{ij}^2}{a_{ii}^2} \leqslant \dfrac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}$. On en conclut que

$$\|\mathrm{I}_n - AX_0\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}.$$

Mais, par caractère fortement dominant,

$$\sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < \frac{1}{n},$$

ce qui assure que

$$\|\mathrm{I}_n - AX_0\|^2 < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} < 1.$$

Ainsi, $\|W_0\| < 1$, d'où la convergence de $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vers 0, et ainsi la convergence de $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vers A^{-1}.

Épilogue. En fait, on a convergence même dans le cas strictement dominant, mais c'est une autre histoire, que l'on ne peut pas résoudre pour le moment... !