

DM14 Pour le lundi 9 février

Formules.

1. « Bases » : partie A du problème 1, exercices 1 et 6 du problème 2. (3h)
2. « Intermédiaire » : partie A et B.5 du problème 1, exercices 1, 6 et 7 du problème 2. (4h)
3. « Avancée » : tout faire !

Problème 1. D'après CCINP TSI 2025 (ou DS06 MPSI2 2026)

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul et $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à $2n$.

Si $a_0, a_1, \dots, a_{2n}$ sont $2n + 1$ réels et Q est le polynôme défini par :

$$Q = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$$

on définit le polynôme $s(Q)$ par :

$$s(Q) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k$$

Autrement dit, $s(Q)$ est le polynôme obtenu à partir de Q en « inversant l'ordre des coefficients ». Par exemple, si n est égal à 2 et si $Q = 7X^3 + 2X^2 + 1$, on obtient $s(Q) = X^4 + 2X^2 + 7X$.

A. Étude d'une application linéaire

1. Calculer $s(1)$, $s(X^n)$ et $s(X^{2n})$.
2. Montrer que l'application $s : Q \mapsto s(Q)$ est un endomorphisme de E .

Remarque : il y a deux choses à démontrer : s est bien à valeurs dans E , et elle est linéaire.

3. Dans le cas où $n = 1$ déterminer $\text{Ker}(s - \lambda \text{Id}_E)$, égal à $\{P \in E, (s - \lambda \text{Id}_E)(P) = 0_E\} = \{P \in E, s(P) = \lambda P\}$ successivement pour
 - (a) $\lambda = 1$
 - (b) $\lambda = -1$
 - (c) $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$

On donnera une base des espaces vectoriels considérés.

4. Étude du cas général. On ne suppose plus que n est égal à 1. On définit la famille $(A_0, \dots, A_{2n})$ de polynômes de E par :

$$A_k = \begin{cases} X^{2n-k} + X^k & \text{si } 0 \leq k \leq n-1 \\ X^n & \text{si } k = n \\ X^k - X^{2n-k} & \text{si } n+1 \leq k \leq 2n \end{cases}.$$

- (a) Justifier que s est une symétrie. Quelles sont les valeurs de $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquelles $\text{Ker}(s - \lambda \text{Id}_E)$ n'est pas trivial ?

Vérifier que $s \circ s = \text{Id}_E$, puis démontrer que $E = \text{ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{ker}(s + \text{Id}_E)$.

- (b) Calculer $s(A_k)$ où $k \in \{0, \dots, 2n\}$.
- (c) Montrer que la famille $(A_0, \dots, A_{2n})$ est libre dans E .

B. Recherche des racines d'un vecteur propre de s

- 5. Préliminaires.** On définit la suite $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de polynômes par : $R_1 = X$, $R_2 = X^2 - 2$ et, pour tout entier k supérieur ou égal à 2 :

$$R_{k+1} = XR_k - R_{k-1}.$$

- (a) Déterminer les polynômes R_3 et R_4 .
(b) Montrer par récurrence que, pour tout entier k strictement positif, R_k est un polynôme de degré k vérifiant, pour tout nombre complexe x non nul, l'égalité :

$$R_k \left(x + \frac{1}{x} \right) = x^k + \frac{1}{x^k}$$

- (c) Pour tout réel a , déterminer, s'ils existent, les complexes x non nuls qui vérifient la relation suivante : $x + \frac{1}{x} = a$. On distinguera trois cas.

6. Une recherche de racines.

Dans cette question, Q désigne un polynôme de degré $2n$ défini par : $Q = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$, tel que a_{2n} soit non nul et tel que, pour tout entier k de l'intervalle $\llbracket 0; n \rrbracket$, l'on ait :

$$a_k = a_{2n-k}$$

- (a) Préciser $s(Q)$.
(b) Justifier que 0 n'est pas racine de Q .
(c) On définit le polynôme $\tilde{Q}$ par : $\tilde{Q} = a_n + \sum_{k=1}^n a_{n-k} R_k$.

Soit x un complexe non nul, on pose : $y = x + \frac{1}{x}$.

Exprimer $x^n \tilde{Q}(y)$ en fonction de $Q(x)$.

En déduire que $Q(x)$ est nul si et seulement si $\tilde{Q}(y)$ est nul.

Quel est l'intérêt de ce résultat dans la recherche des racines de Q ?

- (d) On suppose dans cette question que n est égal à 3 et que Q est défini par :

$$Q = X^6 + X^5 - 9X^4 + 2X^3 - 9X^2 + X + 1.$$

- i. Vérifier que $\tilde{Q} = X^3 + X^2 - 12X$.
ii. En déduire les racines de $\tilde{Q}$ puis celles de Q .

Problème 2. Exercices indépendants d'algèbre linéaire

Exercice 1. Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, posons $E_a = \{f \in E, f(a) = 0\}$.

1. Montrer, que pour tout $a \in \mathbb{R}$, E_a est un sous-espace vectoriel de E .
2. Soit $a \neq b$. Montrer que $E = E_a + E_b$. On fera attention au fait que la somme n'est pas supposée directe : il faut donc chercher une décomposition !
3. La somme de E_a et de E_b peut-elle être directe ?

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E strictement inclus dans E . On veut montrer que E ne peut pas s'écrire comme $F_1 \cup \dots \cup F_n$.

1. Établir le résultat pour $n = 2$.

On suppose le résultat vrai pour $n - 1 \in \mathbb{N}$.

2. Si $F_n \subset F_1 \cup \dots \cup F_{n-1}$, conclure.

Supposons que $F_n \not\subset F_1 \cup \dots \cup F_{n-1}$ et choisissons $x \in F_n \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_{n-1})$ et $y \in E \setminus F_n$.

3. Montrer que $\lambda x + y \notin F_n$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, il existe au plus un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda x + y \in F_i$.
5. Conclure que $\bigcup_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} F_k \neq E$.

Exercice 6. Soit n un entier naturel, α et β deux éléments distincts de $\mathbb{K}$. Démontrer que la famille $((X - a)^k (X - b)^{n-k})_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est libre dans $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 7. Soit n un entier naturel.

1. Soient $(x_0, \dots, x_n)$ $n + 1$ éléments distincts de $\mathbb{K}$. On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P \mapsto (P(x_0), \dots, P(x_n)) \end{cases}.$$

Démontrer que c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels, c'est-à-dire que cette application est linéaire et bijective. Pour ce faire, on citera proprement la propriété du cours correspondant et on donnera une expression explicite de f^{-1} .

2. On considère un élément α de $\mathbb{K}$ et l'application

$$g : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P \mapsto (P(\alpha), P'(\alpha), \dots, P^{(n)}(\alpha)) \end{cases}.$$

Démontrer que c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels, c'est-à-dire que cette application est linéaire et bijective. Pour ce faire, on citera proprement la propriété du cours correspondant et on donnera une expression explicite de g^{-1} .