

MPSI1 – Programme de colles
Semaine 20 – du 9 au 13 mars 2026

Polynômes

Révisions

Espaces vectoriels et applications linéaires

A - Espaces vectoriels

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Espaces vectoriels	
Structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Produit d'un nombre fini de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel. Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.	Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Espace $\mathbb{K}^\Omega$, cas particulier $\mathbb{K}^\mathbb{N}$. On commence par la notion de combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.
b) Sous-espaces vectoriels	
Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation. Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels. Sous-espace vectoriel engendré par une partie A .	Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$. Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène. Notations $\text{Vect}(A)$, $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant A contient $\text{Vect}(A)$.
c) Familles de vecteurs	
Famille (partie) génératrice. Famille (partie) libre, liée. Base, coordonnées.	Ajout d'un vecteur à une famille (partie) libre. Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts. Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$. Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$.
d) Somme de deux sous-espaces	
Somme de deux sous-espaces. Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection. Sous-espaces supplémentaires.	La somme $F + G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F + G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique. On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

C - Applications linéaires

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Généralités

Application linéaire.

Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.

Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F .

Bilinéarité de la composition.

Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.

Image d'une application linéaire.

Noyau d'une application linéaire.

b) Endomorphismes

Identité, homothéties.

Notations id_E , id .

Anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$.

Notation vu pour la composée $v \circ u$. Notation u^k pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.

Automorphismes. Groupe linéaire.

Notation $\text{GL}(E)$.

Notation u^k pour $u \in \text{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.

Au programme :

- cours d'algèbre linéaire (avec le tout tout début des applications linéaires)
- exercices d'algèbre linéaire : il s'agit d'une colle d'**accompagnement**. Nous avons parlé de sous-espaces vectoriels, de familles, de somme de sev. Du point de vue des applications linéaires, nous avons juste défini ce qu'est une application linéaire, la composition, vu que l'image directe et réciproque étaient des sous-espaces vectoriels, et défini le noyau et l'image (**sans avoir vu les conséquences sur l'injectivité ou les solutions de $f(x) = y$!**).
Le but de cette colle est donc de travailler sur des espaces vectoriels sans applications linéaires ou bien de voir des exemples d'applications linéaires, en guidant bien.

Exemples de questions de cours

1. Une intersection de deux/d'une famille de sev est un sev.
2. Définitions équivalentes de $\text{Vect}(A)$, où A est une partie de E .
3. Si F et G sont deux sev, si $F \cup G$ est un sev, alors $F \subset G$ ou $G \subset F$.
4. Définition d'une famille (quelconque) libre + une famille est liée si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres + si une famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre et $y \notin \text{Vect}(x_i)_{i \in I}$, alors $(x_i)_{i \in I} \cup \{y\}$ est libre.
5. Caractérisation de la liberté par unicité de l'écriture d'un élément de $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$.
6. Une famille de polynômes à degrés échelonnés est libre (preuve dans le cas fini).
7. Somme directe, caractérisation d'une somme directe.
8. Distributivité de $\circ$ sur $+$; si φ est linéaire bijective, φ^{-1} est linéaire.
9. L'image directe, l'image réciproque d'un sev par une application linéaire est un sev.