

DM14 Pour le lundi 9 février

Formules.

1. « Bases » : partie A du problème 1, exercices 1 et 6 du problème 2. (3h)
2. « Intermédiaire » : partie A et B.5 du problème 1, exercices 1, 6 et 7 du problème 2. (4h)
3. « Avancée » : tout faire !

Problème 1. D'après CCINP TSI 2025 (ou DS06 MPSI2 2026)

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul et $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à $2n$.

Si $a_0, a_1, \dots, a_{2n}$ sont $2n + 1$ réels et Q est le polynôme défini par :

$$Q = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$$

on définit le polynôme $s(Q)$ par :

$$s(Q) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k$$

Autrement dit, $s(Q)$ est le polynôme obtenu à partir de Q en « inversant l'ordre des coefficients ». Par exemple, si n est égal à 2 et si $Q = 7X^3 + 2X^2 + 1$, on obtient $s(Q) = X^4 + 2X^2 + 7X$.

A. Étude d'une application linéaire

1. Calculer $s(1)$, $s(X^n)$ et $s(X^{2n})$.
2. Montrer que l'application $s : Q \mapsto s(Q)$ est un endomorphisme de E .

Remarque : il y a deux choses à démontrer : s est bien à valeurs dans E , et elle est linéaire.

3. Dans le cas où $n = 1$ déterminer $\text{Ker}(s - \lambda \text{Id}_E)$, égal à $\{P \in E, (s - \lambda \text{Id}_E)(P) = 0_E\} = \{P \in E, s(P) = \lambda P\}$ successivement pour
 - (a) $\lambda = 1$
 - (b) $\lambda = -1$
 - (c) $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$

On donnera une base des espaces vectoriels considérés.

4. Étude du cas général. On ne suppose plus que n est égal à 1. On définit la famille $(A_0, \dots, A_{2n})$ de polynômes de E par :

$$A_k = \begin{cases} X^{2n-k} + X^k & \text{si } 0 \leq k \leq n-1 \\ X^n & \text{si } k = n \\ X^k - X^{2n-k} & \text{si } n+1 \leq k \leq 2n \end{cases}.$$

- (a) Justifier que s est une symétrie. Quelles sont les valeurs de $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquelles $\text{Ker}(s - \lambda \text{Id}_E)$ n'est pas trivial ?

Vérifier que $s \circ s = \text{Id}_E$, puis démontrer que $E = \text{ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{ker}(s + \text{Id}_E)$.

- (b) Calculer $s(A_k)$ où $k \in \{0, \dots, 2n\}$.
- (c) Montrer que la famille $(A_0, \dots, A_{2n})$ est libre dans E .

B. Recherche des racines d'un vecteur propre de s

- 5. Préliminaires.** On définit la suite $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de polynômes par : $R_1 = X$, $R_2 = X^2 - 2$ et, pour tout entier k supérieur ou égal à 2 :

$$R_{k+1} = XR_k - R_{k-1}.$$

- (a) Déterminer les polynômes R_3 et R_4 .
(b) Montrer par récurrence que, pour tout entier k strictement positif, R_k est un polynôme de degré k vérifiant, pour tout nombre complexe x non nul, l'égalité :

$$R_k \left(x + \frac{1}{x} \right) = x^k + \frac{1}{x^k}$$

- (c) Pour tout réel a , déterminer, s'ils existent, les complexes x non nuls qui vérifient la relation suivante : $x + \frac{1}{x} = a$. On distinguera trois cas.

6. Une recherche de racines.

Dans cette question, Q désigne un polynôme de degré $2n$ défini par : $Q = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$, tel que a_{2n} soit non nul et tel que, pour tout entier k de l'intervalle $\llbracket 0; n \rrbracket$, l'on ait :

$$a_k = a_{2n-k}$$

- (a) Préciser $s(Q)$.
(b) Justifier que 0 n'est pas racine de Q .
(c) On définit le polynôme $\tilde{Q}$ par : $\tilde{Q} = a_n + \sum_{k=1}^n a_{n-k} R_k$.

Soit x un complexe non nul, on pose : $y = x + \frac{1}{x}$.

Exprimer $x^n \tilde{Q}(y)$ en fonction de $Q(x)$.

En déduire que $Q(x)$ est nul si et seulement si $\tilde{Q}(y)$ est nul.

Quel est l'intérêt de ce résultat dans la recherche des racines de Q ?

- (d) On suppose dans cette question que n est égal à 3 et que Q est défini par :

$$Q = X^6 + X^5 - 9X^4 + 2X^3 - 9X^2 + X + 1.$$

- i. Vérifier que $\tilde{Q} = X^3 + X^2 - 12X$.
ii. En déduire les racines de $\tilde{Q}$ puis celles de Q .

Problème 2. Exercices indépendants d'algèbre linéaire

Exercice 1. Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, posons $E_a = \{f \in E, f(a) = 0\}$.

1. Montrer, que pour tout $a \in \mathbb{R}$, E_a est un sous-espace vectoriel de E .

Correction

Soit $a \in \mathbb{R}$. Déjà, la fonction nulle s'annule bien en a , donc elle appartient à E_a .
Soient ensuite f et g dans E_a , λ et μ dans $\mathbb{R}$. Alors

$$(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda f(a) + \mu g(a) = 0,$$

donc $\lambda f + \mu g \in E_a$. Donc E_a est bien un sous-espace vectoriel de E .

2. Soit $a \neq b$. Montrer que $E = E_a + E_b$. On fera attention au fait que la somme n'est pas supposée directe : il faut donc chercher une décomposition !

Correction

Soit $f \in E$.

...au brouillon...

On cherche à écrire f comme la somme de g et de h avec $g \in E_a$ et $h \in E_b$. Ainsi, g doit s'annuler en a et valoir $f(b)$ en b . Tant qu'à faire, si g est une fonction affine, cela a l'air de marcher... !

Posons $g : x \mapsto \frac{f(b)}{b-a}(x-a)$ et $h = f - g$. Alors $g(a) = 0$, donc $g \in E_a$, $h(b) = f(b) - g(b) = 0$ donc $h \in E_b$, et $g + h = f$.
Donc $E \subset E_a + E_b$, donc $E = E_a + E_b$.

3. La somme de E_a et de E_b peut-elle être directe ?

Correction

NON, la somme n'est pas directe ! En effet, si $f : x \mapsto (x-a)(x-b)$, alors f n'est pas la fonction nulle mais $f \in E_a \cap E_b$. Donc $E_a \cap E_b \neq \{0\}$, donc la somme n'est pas directe.

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, p et q deux projecteurs de E , tels que $p \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On définit $r = p + q - q \circ p$.

1. Démontrer que pour tous u et v dans $\mathcal{L}(E)$, $u \circ v = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow \text{Im}(v) \subset \ker(u)$.

Correction

Raisonnons par équivalence. Soit u et v dans $\mathcal{L}(E)$. Alors

$$\begin{aligned} u \circ v = 0_{\mathcal{L}(E)} &\Leftrightarrow \forall x \in E, u(v(x)) = 0_E \\ &\Leftrightarrow \forall y \in \text{Im}(v), u(y) = 0_E \\ &\Leftrightarrow \forall y \in \text{Im}(v), y \in \ker(u) \\ &\Leftrightarrow \text{Im}(v) \subset \ker(u). \end{aligned}$$

2. Calculer $p \circ r$, $q \circ r$, et démontrer que r est un projecteur.

Correction

Commençons par les deux calculs demandés :

- Déjà,

$$p \circ r = p \circ (p + q - q \circ p) = p \circ p + p \circ q - p \circ q \circ p.$$

Comme $p \circ q = 0$, et que $p \circ p = p$ (p est un projecteur!), on en déduit que

$$p \circ r = p.$$

- Ensuite,

$$q \circ r = q \circ (p + q - q \circ p) = q \circ p + q \circ q - q \circ q \circ p.$$

Mais q est un projecteur donc $q \circ q = q$, donc

$$q \circ r = q \circ (p + q - q \circ p) = q \circ p + q - q \circ p = q.$$

Finalement, calculons $r \circ r$:

$$r \circ r = (p + q - q \circ p) \circ r = p \circ r + q \circ r - q \circ p \circ r.$$

Mais $p \circ r = p$ et $q \circ r = q$, donc

$$r \circ r = p + q - q \circ p = r.$$

Donc r est un projecteur.

3. Démontrer que $\ker(r) = \ker(p) \cap \ker(q)$.

Correction

Raisonnons par double inclusion.

$\subset$ Soit x dans $\ker(r)$. Alors $r(x) = 0$, donc

— $p \circ r(x) = 0$, donc $p(x) = 0$ donc $x \in \ker(p)$.

— $q \circ r(x) = 0$, donc $q(x) = 0$ donc $x \in \ker(q)$.

Donc $x \in \ker(p) \cap \ker(q)$.

$\supset$ Soit x dans $\ker(p) \cap \ker(q)$. Alors $p(x) = q(x) = 0$, donc

$$r(x) = p(x) + q(x) - q \circ p(x) = 0 + 0 - q(0) = 0.$$

Donc $x \in \ker(r)$.

D'où la double inclusion et l'égalité de ces deux ensembles.

4. Démontrer que $\text{Im}(r) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$.

Correction

Plusieurs manières de voir cette question : ou bien on démontre par double inclusion que $\text{Im}(r) = \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$ puis on regarde $\text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$, ou bien on effectue, comme dans ce corrigé, une analyse-synthèse : soit x dans $\text{Im}(r)$, a dans E tel que $x = r(a)$.

Analyse. On suppose que $x = y + z$ avec $y \in \text{Im}(p)$ et $z \in \text{Im}(q)$. Comme $z \in \text{Im}(q)$, $z \in \ker(p)$, donc $p(x) = p(y) + 0 = y$, car $y \in \text{Im}(p)$. Mais $p \circ r = p$, donc $p(x) = p \circ r(a) = p(a)$. Donc $y = p(a)$.

De même, $q(x) = q(y) + q(z) = q(y) + z$ car $z \in \text{Im}(q)$. Mais $q(x) = q(r(a)) = q(a)$, et $q(y) = q(p(a))$. Donc $z = q(a) - q \circ p(a)$.

Synthèse. Posons $y = p(a)$ et $z = q(a) - q \circ p(a)$. Alors

- $y \in \text{Im}(p)$
- $z \in \text{Im}(q)$
- $y + z = p(a) + q(a) - q \circ p(a) = r(a) = x$.

D'où le résultat !

Exercice 3. Soit p un projecteur de E . On définit les sous-espaces

$$F_1 = \{f \in \mathcal{L}(E), \exists u \in \mathcal{L}(E), f = u \circ p\}, \quad F_2 = \{f \in \mathcal{L}(E), \exists u \in \mathcal{L}(E), f = u \circ (\text{Id} - p)\}.$$

Montrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires de $\mathcal{L}(E)$. On procèdera par analyse-synthèse, et on fera très attention aux objets manipulés.

Correction

Là, on fait une analyse-synthèse. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Analyse. On suppose que $f = g + h$ avec $g \in F_1$ et $h \in F_2$. On dispose donc de u et de v dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $f = u \circ p + v \circ q$, si l'on pose $q = \text{Id}_E - p$. En particulier,

$$f \circ p = u \circ p \circ p + v \circ q \circ p = u \circ p \text{ car } p \circ p = p \text{ et } q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

De même, $f \circ q = v \circ q$.

Ainsi,

$$g = u \circ p = f \circ p \text{ et } h = v \circ q = f \circ q.$$

Synthèse. Posons $g = f \circ p$ et $h = f \circ q$. Alors

- $g \in F_1$,
- $h \in F_2$,
- $g + h = f \circ (p + q) = f \circ \text{Id}_E = f$.

Ceci démontre que $\forall f \in E, \exists!(g, h) \in F_1 \times F_2, f = g + h$, ce qui assure la supplémentarité des deux sous-espaces vectoriels.

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E strictement inclus dans E . On veut montrer que E ne peut pas s'écrire comme $F_1 \cup \dots \cup F_n$.

1. Établir le résultat pour $n = 2$.

Correction

Si E s'écrit comme la réunion de deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 , alors $F_1 \cup F_2$ est un sous-espace vectoriel de E donc, d'après le cours, $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$, donc $F_1 = E$ ou $F_2 = E$, absurde car ces deux sous-espaces vectoriels sont censés être stricts.

On suppose le résultat vrai pour $n - 1 \in \mathbb{N}$.

2. Si $F_n \subset F_1 \cup \dots \cup F_{n-1}$, conclure.

Correction

Si $F_n \subset F_1 \cup \dots \cup F_{n-1}$, alors $F_1 \cup \dots \cup F_{n-1} = E$, donc on est ramenés au résultat par le principe de récurrence.

Supposons que $F_n \not\subset F_1 \cup \dots \cup F_{n-1}$ et choisissons $x \in F_n \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_{n-1})$ et $y \in E \setminus F_n$.

3. Montrer que $\lambda x + y \notin F_n$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Correction

Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda x + y \in F_n$. Alors, comme $x \in F_n$, $\lambda x + y - \lambda x \in F_n$, c'est-à-dire que $y \in F_n$, absurde !

4. Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, il existe au plus un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda x + y \in F_i$.

Correction

Supposons qu'il existe $\lambda \neq \mu$ tels que $\lambda x + y \in F_i$ et $\mu x + y \in F_i$. Alors $(\lambda - \mu)x \in F_i$ soit, comme $\lambda - \mu \neq 0$, $x \in F_i$, absurde !

5. Conclure que $\bigcup_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} F_k \neq E$.

Correction

Comme $\mathbb{R}$ est infini, on dispose de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda x + y$ ne soit dans aucun des $(F_i)_{1 \leq i \leq n-1}$, ni dans F_n . Ainsi, $F_1 \cup \dots \cup F_n \neq E$!

Exercice 5. Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, dont tous les sous-espaces admettent des supplémentaires. Soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $u = v \circ \phi$ si, et seulement si, $\ker \phi \subset \ker(u)$.

Correction

S'il existe $v \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $u = v \circ \phi$, alors pour tout x dans $\ker(\phi)$, $u(x) = v(\phi(x)) = v(0) = 0$, donc $x \in \ker(u)$.

Si $\ker(\phi) \subset \ker(u)$, on voudrait définir « $v = u \circ \phi^{-1}$ ». Mais cela n'a pas de sens... sauf si l'on fait en sorte de rendre ϕ bijective ! Soit alors S un supplémentaire de $\ker(\phi)$ dans E . Alors

$$\psi : \begin{cases} S \rightarrow \text{Im}(\phi) \\ x \mapsto \phi(x) \end{cases} \text{ est un isomorphisme.}$$

Soit T un supplémentaire de $\text{Im}(\phi)$ dans E . Posons alors $v \in \mathcal{L}(E, F)$ définie par :

$$v|_T = 0_{\mathcal{L}(T, F)} \text{ et } v|_{\text{Im}(\phi)} = u \circ \psi^{-1}$$

(on rappelle que l'on peut définir une application linéaire par sa restriction à des sous-espaces supplémentaires)

Soit alors $x \in E$. On écrit $x = y + z$ avec $y \in \ker(\phi)$ et $z \in S$. Alors

$$u(x) = u(y + z) = u(z) \text{ car } y \in \ker(\phi) \subset \ker(u).$$

Ensuite,

$$v \circ \phi(x) = u \circ \psi^{-1} \circ \phi(x) = u(x),$$

d'où l'égalité désirée !

Exercice 6. Soit n un entier naturel, α et β deux éléments distincts de $\mathbb{K}$.

Démontrer que la famille $((X - a)^k(X - b)^{n-k})_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est libre dans $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 7. Soit n un entier naturel.

1. Soient $(x_0, \dots, x_n)$ $n + 1$ éléments distincts de $\mathbb{K}$. On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P \mapsto (P(x_0), \dots, P(x_n)) \end{cases}.$$

Démontrer que c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels, c'est-à-dire que cette application est linéaire et bijective. Pour ce faire, on citera proprement la propriété du cours correspondant et on donnera une expression explicite de f^{-1} .

2. On considère un élément α de $\mathbb{K}$ et l'application

$$g : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P \mapsto (P(\alpha), P'(\alpha), \dots, P^{(n)}(\alpha)) \end{cases}.$$

Démontrer que c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels, c'est-à-dire que cette application est linéaire et bijective. Pour ce faire, on citera proprement la propriété du cours correspondant et on donnera une expression explicite de g^{-1} .