

Problème

Q1. Soit $Q(X) = 1 = a_0$ et les autres coefficients sont nuls.
Alors $s(Q) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k = a_0 \cdot X^{2n}$ car seul le terme pour $k = 2n$ est non nul. Ainsi :

$$s(1) = X^{2n}$$

Soit $Q(X) = X^n$ i.e. $a_n = 1$ et les autres coefficients sont nuls.
Alors $s(Q) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k = a_n \cdot X^n$ car seul le terme pour $k = n$ est non nul. Ainsi :

$$s(X^n) = X^n$$

Soit $Q(X) = X^{2n}$ i.e. $a_{2n} = 1$ et les autres coefficients sont nuls.
Alors $s(Q) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k = a_{2n} \cdot X^0$ car seul le terme pour $k = 0$ est non nul. Ainsi :

$$s(X^{2n}) = 1$$

Q2. D'une part, comme $s(Q) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k$, $s(Q)$ est de degré inférieur ou égal à $2n$, donc $S(Q) \in E$.

D'autre part, soient $Q = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k \in E$, $P = \sum_{k=0}^{2n} b_k X^k \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
alors $\lambda P + Q = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k$ avec $\forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, $c_k = \lambda b_k + a_k$,

$$\begin{aligned} \text{et } s(\lambda P + Q) &= \sum_{k=0}^{2n} c_{2n-k} X^k = \sum_{k=0}^{2n} (\lambda b_{2n-k} + a_{2n-k}) X^k = \lambda \sum_{k=0}^{2n} b_{2n-k} X^k + \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k \\ &= \lambda \cdot s(P) + s(Q), \text{ donc } s \text{ est linéaire.} \end{aligned}$$

s est un endomorphisme de E

Q3. Soit $n = 1$, i.e. $2n = 2$.

a) Calcul en coordonnées : $s(Q) = Q \iff \exists \alpha, \beta \quad Q = \alpha(X^2 + 1) + \beta X$, d'où une base de $\text{Ker}(s - \text{Id}_E) : (X, X^2 + 1)$.

b) Calcul en coordonnées : $s(Q) = -Q \iff \exists \alpha \quad Q = \alpha(X^2 - 1)$, d'où une base de $\text{Ker}(s - \text{Id}_E) : (X^2 - 1)$.

b) Calcul en coordonnées : si $\lambda \notin \{1, -1\}$ alors $\text{Ker}(s - \lambda \text{Id}_E) = \{0\}$.

Q4. a) Soit $Q = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$ un polynôme quelconque de E ,
alors $s(Q) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k = \sum_{k=0}^{2n} b_k X^k$ avec $b_k = a_{2n-k}$.
d'où $s \circ s(Q) = s\left(\sum_{k=0}^{2n} b_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{2n} b_{2n-k} X^k = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-(2n-k)} X^k = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k = Q$. Ainsi :

$s \circ s = \text{id}$ donc s est une symétrie.

Comme s n'est ni id , ni $-\text{id}$, on en déduit :

- $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ ne sont pas triviaux ;
- si $s(Q) = \lambda Q$ alors en appliquant s il vient $Q = \lambda^2 Q$ d'où $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$ ou bien $Q = 0$, bref, si λ n'est ni 1 ni -1 alors $\text{Ker}(s - \lambda \text{Id}_E)$ est trivial.

b) Pour $0 \leq k \leq n-1$, les coefficients de A_k sont nuls sauf $a_k = a_{2n-k} = 1$ d'où $s(A_k) = s(X^{2n-k} + X^k) = a_{2n-k}X^k + a_kX^{2n-k} = A_k$.
 $s(X^n) = X^n$ d'après Q1, d'où $s(A_n) = A_n$
 Pour $n+1 \leq k \leq 2n$, les coefficients de A_k sont nuls sauf $a_k = 1$ et $a_{2n-k} = -1$ d'où $s(A_k) = s(X^k - X^{2n-k}) = a_{2n-k}X^k + a_kX^{2n-k} = -X^k + X^{2n-k} = -A_k$.

c) Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ tels que $\sum_{k=0}^{2n} \alpha_k A_k = 0$, alors

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k A_k + \sum_{k=n+1}^{2n} \alpha_k A_k = 0$$

En appliquant s à (1), on obtient alors

$$s\left(\sum_{k=0}^n \alpha_k A_k\right) + s\left(\sum_{k=n+1}^{2n} \alpha_k A_k\right) = 0$$

soit encore

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k A_k - \sum_{k=n+1}^{2n} \alpha_k A_k = 0 \quad (2)$$

Et en combinant (1) et (2), on a $\begin{cases} \sum_{k=0}^n \alpha_k A_k = 0 \\ \sum_{k=n+1}^{2n} \alpha_k A_k = 0 \end{cases}$

Or pour $0 \leq k \leq n$, A_k est de degré $2n-k$, donc $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ est constituée de polynômes non nuls échelonnés en degré : cette famille est libre.
 Et (3) $\Rightarrow \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \alpha_k = 0$.

De même, pour $n+1 \leq k \leq 2n$, A_k est de degré $k > 2n-k$, donc $(A_{n+1}, \dots, A_{2n})$ est constituée de polynômes non nuls échelonnés en degré : cette famille est libre.

Et (4) $\Rightarrow \forall k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket \alpha_k = 0$.

Finalement, $\forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket \alpha_k = 0$:

$(A_0, A_1, \dots, A_{2n})$ est une famille libre de E .

Q5. a) D'après l'énoncé, $R_3(X) = XR_2(X) - R_1(X) = X(X^2 - 2) - X = X^3 - 2X - X = X^3 - 3X$, et $R_4(X) = XR_3(X) - R_2(X) = X(X^3 - 3X) - (X^2 - 2) = X^4 - 3X^2 - X^2 + 2 = X^4 - 4X^2 + 2$.

conclusion : $R_3(X) = X^3 - 3X$ et $R_4(X) = X^4 - 4X^2 + 2$

b) Démontrons le résultat demandé à l'aide d'une récurrence double.

Soit $\mathcal{P}_k$: " R_k est de degré k et $\forall x \in \mathbb{C}^* R_k(x + \frac{1}{x}) = x^k + \frac{1}{x^k}$ "

— Initialisation :

Soit $k = 1$: $R_1(X) = X$ donc R_1 est de degré 1 et $\forall x \in \mathbb{C}^* R_1 \left(x + \frac{1}{x}\right) = x + \frac{1}{x} = x^1 + \frac{1}{x^1}$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Soit $k = 2$: $R_2(X) = X^2 - 2X$ donc R_2 est de degré 2 et

$\forall x \in \mathbb{C}^* R_2 \left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x \cdot \frac{1}{x} - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$ donc $\mathcal{P}_2$ est vraie.

— Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons $\mathcal{P}_k$ et $\mathcal{P}_{k+1}$ vraie, et montrons que $\mathcal{P}_{k+2}$ est vraie.

$R_{k+2} = XR_{k+1} - R_k \cdot \deg(R_k) = k$ et $\deg(R_{k+1}) = k+1$ par hypothèse de récurrence, donc $\deg(XR_{k+1}) = k+2$, et par somme, comme $k \neq k+2$ il vient $\deg(R_{k+2}) = k+2$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{C}^* R_{k+2} \left(x + \frac{1}{x}\right) &= \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot R_{k+1} \left(x + \frac{1}{x}\right) - R_k \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}\right) - \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) \text{ d'après } \mathcal{P}_k \text{ et } \mathcal{P}_{k+1} \\ &= x^{k+2} + x^k + \frac{1}{x^k} + \frac{1}{x^{k+2}} - x^k - \frac{1}{x^k} = x^{k+2} + \frac{1}{x^{k+2}} \end{aligned}$$

— Conclusion : on a montré par récurrence double que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, R_k \text{ est de degré } k \text{ et } \forall x \in \mathbb{C}^* R_k \left(x + \frac{1}{x}\right) = x^k + \frac{1}{x^k}$$

c) Comme $x \neq 0, x + \frac{1}{x} = a \Leftrightarrow x^2 - ax + 1 = 0(\mathcal{E})$.

Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = a^2 - 4$.

1^{er} cas : si $a = \pm 2, \Delta = 0$ et $(\mathcal{E})$ a une racine double $x = \frac{a}{2}$.

2^{ème} cas : si $a > 2$ ou $a < -2, (\mathcal{E})$ a deux racines réelles distinctes

$$x_1, x_2 = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

3^{ème} cas : si $-2 < a < 2, (\mathcal{E})$ a deux racines complexes conjuguées

$$x_1, x_2 = \frac{a \pm i\sqrt{4 - a^2}}{2}$$

Q6. a) $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = a_{2n-k}$. Alors pour $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$, comme $2n - k \leq 2n - (n+1) \leq n-1$,

on a $a_{2n-k} = a_{2n-(2n-k)} = a_k$.

Ainsi $\forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, a_k = a_{2n-k}$.

Par conséquent, $s(Q) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k = Q(X)$. De plus $Q \neq 0$ car $a_{2n} \neq 0$.

Q est un vecteur propre de s associé à la valeur propre 1.

b) $Q(0) = a_0 = a_{2n-0} = a_{2n} \neq 0$ par hypothèse :

0 n'est pas racine de Q

c) $x^n \cdot \tilde{Q}(y) = x^n \cdot (a_n + \sum_{k=1}^n a_{n-k} R_k (x + \frac{1}{x})) = x^n \cdot (a_n + \sum_{k=1}^n a_{n-k} (x^k + \frac{1}{x^k}))$
d'après Q5)b)

$$\begin{aligned}
&= a_n x^n + x^n \cdot \left(\sum_{k=1}^n a_{n-k} x^k + \sum_{k=1}^n a_{n-k} \frac{1}{x^k} \right) \\
&= a_n x^n + \sum_{k=1}^n a_{n-k} x^{k+n} + \sum_{k=1}^n a_{n-k} x^{n-k} \\
&= a_n x^n + \sum_{i=n+1}^{2n} a_{2n-i} x^i + \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j \text{ en posant } i = k + n \text{ et } j = n - k \\
&= a_n x^n + \sum_{i=n+1}^{2n} a_i x^i + \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j \text{ car } a_{2n-i} = a_i \\
&= \sum_{i=0}^{2n} a_i x^i = Q(x)
\end{aligned}$$

Si $\tilde{Q}(y) = 0$ alors $Q(x) = x^n \cdot 0 = 0$

Si $Q(x) = 0$, alors $x \neq 0$ d'après Q6.b) et $x^n \cdot \tilde{Q}(y) = 0$ donc $\tilde{Q}(y) = 0$.

Conclusion : $Q(x) = 0 \iff \tilde{Q}(y) = 0$

Intérêt : Chercher les racines de Q de degré $2n$ revient à chercher celles de $\tilde{Q}$ de degré n . Ainsi, pour chercher les racines de Q , on cherche les racines de $\tilde{Q}$ puis on utilise la question Q5.c).

d) i. Dans cet exemple : $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = -9, a_3 = 2, a_4 = -9$ et $a_5 = a_6 = 1$.

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}(X) &= a_3 + \sum_{k=1}^3 a_{3-k} R_k = a_3 + a_2 R_1 + a_1 R_2 + a_0 R_3 = 2 - 9X + 1 \cdot (X^2 - 2) + 1 \cdot (X^3 - 3X) \\
&= 2 - 9X + X^2 - 2 + X^3 - 3X = X^3 + X^2 - 12X.
\end{aligned}$$

On a bien $\tilde{Q}(X) = X^3 + X^2 - 12X$

ii. $\tilde{Q}(X) = X(X^2 + X - 12)$. Le discriminant de $X^2 + X - 12$ est $\Delta = 1 + 48 = 49 = 7^2$, d'où $x_1 = \frac{1+7}{2} = 4$ et $x_2 = \frac{1-7}{2} = -3$.

Les racines de $\tilde{Q}$ sont 0, -3 et 4.

D'après Q5.c) :

$$\begin{aligned}
y = 0 &\Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x_1, x_2 = \frac{0 \pm i\sqrt{4}}{2} = \pm i (\text{cas 3 avec } a = 0) \\
y = -3 &\Leftrightarrow x_1, x_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} (\text{cas 2 avec } a = -3) \\
y = 4 &\Leftrightarrow x_1, x_2 = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} (\text{cas 2 avec } a = 4)
\end{aligned}$$

Les racines de Q sont $i, -i, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, 2-\sqrt{3}$ et $2+\sqrt{3}$.