

Espaces vectoriels et applications linéaires

A - Espaces vectoriels

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Espaces vectoriels	
Structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.	Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Produit d'un nombre fini de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.	
Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.	Espace $\mathbb{K}^\Omega$, cas particulier $\mathbb{K}^\mathbb{N}$.
Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.	On commence par la notion de combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.
b) Sous-espaces vectoriels	
Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
	Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.	Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.
Sous-espace vectoriel engendré par une partie A .	Notations $\text{Vect}(A)$, $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant A contient $\text{Vect}(A)$.
c) Familles de vecteurs	
Famille (partie) génératrice.	Ajout d'un vecteur à une famille (partie) libre.
Famille (partie) libre, liée.	Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts.
	Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$.
Base, coordonnées.	Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$.
d) Somme de deux sous-espaces	
Somme de deux sous-espaces.	
Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F + G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F + G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.
Sous-espaces supplémentaires.	On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

C - Applications linéaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Application linéaire.	
Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.	Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F . Bilinéarité de la composition.
Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.	
Image d'une application linéaire.	
Noyau d'une application linéaire.	Caractérisation de l'injectivité.
Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\text{Im } u = \text{Vect}(u(x_i))_{i \in I}$.	
b) Endomorphismes	
Identité, homothéties.	Notations id_E , id .

Anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$.

Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = \text{id}$.
Automorphismes. Groupe linéaire.

Non commutativité si $\dim E \geq 2$.

Notation vu pour la composée $v \circ u$. Notation u^k pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.

On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3.

Notation $\text{GL}(E)$.

Notation u^k pour $u \in \text{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.

c) Détermination d'une application linéaire

Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F , alors il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.

Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u .

e) Formes linéaires et hyperplans

Forme linéaire.

Hyperplan, défini comme noyau d'une forme linéaire non nulle.

Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H , alors $E = H \oplus D$.

Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan.

Comparaison de deux équations d'un même hyperplan.

L'étude de la dualité est hors programme.

Formes coordonnées relativement à une base.

Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.

Organisation de la colle. Cours et exos d'algèbre linéaire.

Exemples de questions de cours

1. Une famille de polynômes à degrés échelonnés est libre (preuve dans le cas fini).
2. Somme directe, caractérisation d'une somme directe.
3. Distributivité de $\circ$ sur $+$; si φ est linéaire bijective, φ^{-1} est linéaire.
4. L'image directe, l'image réciproque d'un sev par une application linéaire est un sev.
5. Définition du noyau et de l'image. Condition Nécessaire et Suffisante d'injectivité, puis de surjectivité en fonction de l'image et du noyau.
6. Une application linéaire réalise un isomorphisme de tout supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ sur $\text{Im}(f)$: formulation précise et démonstration.
7. Description et démonstration de l'ensemble des solutions de $f(x) = y$ si $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
8. Lien entre familles et injectivité/surjectivité/bijektivité des applications linéaires.
9. Définition d'une projection ; une projection est linéaire ; si p est la projection sur F parallèlement à G , $F = \text{Im}(p) = \text{ker}(p - \text{Id})$ et $G = \text{ker}(p)$; $p \circ p = p$.
10. Si $p \circ p = p$, alors p est une projection.
11. Définition d'une symétrie + $s \circ s = \text{Id}_E$ + caractérisation algébrique des espaces par rapport auxquels on fait la symétrie.
12. Une involution est une symétrie.
13. H est un hyperplan ssi il est supplémentaire d'une droite.