

Chapitre 18 – Intégration

1 Propriétés de l'intégrale

Définition 1

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est continue par morceaux (cpm) sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision σ de $[a, b]$, $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ (avec $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$) telle que pour tout i de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

- $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ est continue,
- $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ possède des limites finies en x_i (à droite) et x_{i+1} (à gauche).

On note leur ensemble $\mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{K})$. Cet ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{[a, b]}$.

Si I est un intervalle, on dit que f est continue par morceaux sur I si elle l'est sur tout segment de I .

Proposition 2

Soit I un intervalle, $(a, b) \in I^2$.

- (i) L'application $f \mapsto \int_{[a, b]} f$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions cpm.
- (ii) (inégalité triangulaire) Pour toute fonction f cpm, si $a \leq b$, $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$.
- (iii) Si $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}(I, \mathbb{K})$, si g est une fonction égale à f sauf en un nombre fini de points, alors g est continue par morceaux et $\int_a^b g = \int_a^b f$.
- (iv) Pour toute fonction f cpm, pour tout c dans I , $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$.
- (v) Pour toute fonction f cpm, $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \Re(f(t)) dt + i \int_a^b \Im(f(t)) dt$.
- (vi) Si f est dans $\mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{K})$, $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

Proposition 3

Soient f et g deux fonctions cpm à valeurs **réelles** sur $[a, b]$.

- (i) Si $\forall t \in [a, b], f(t) \geq 0$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$
- (ii) Si $\forall t \in [a, b], f(t) \leq g(t)$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.
- (iii) Si f est continue, si $f(t) \geq 0$ sur $[a, b]$, $\int_a^b f(t) dt = 0 \Rightarrow f = 0$.

Proposition 4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt \int_a^b g^2(t)dt}.$$

Si f et g sont continues, il y a égalité si, et seulement si f et g sont colinéaires, i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, tel que pour tout t dans $[a, b]$, $f(t) = \lambda g(t)$.

Point de méthode 5

Petit récapitulatif des différentes méthodes de calcul d'intégrales :

- (i) La primitivation directe, lorsqu'on reconnaît $u'(x)f'(u(x))$.
- (ii) L'intégration par parties : soit en écrivant $f(t) = 1 \times f(t)$ (par exemple pour $\ln$), soit en remarquant que l'un des membres du produit est stable par dérivation/intégration (par exemple, $t^k e^t$)
- (iii) Le changement de variables
- (iv) Pour les intégrales de fractions rationnelles : la décomposition en éléments simples
- (v) Pour les intégrales de fractions rationnelles en sinus et cosinus : soit on repère un changement de variables $\sin/\cos/\tan$ qui paraît naturel, soit, si on ne voit pas, le changement de variables $u = \tan(t/2)$.
- (vi) Pour les intégrales de fractions rationnelles en ch et sh , soit on essaie de regarder le changement de variables qui conviendrait à la fraction rationnelle trigonométrique correspondante, soit on effectue le changement de variables $u = e^t$.

RÉVISER LES DIFFÉRENTS CHAPITRES FAISANT INTERVENIR DES INTÉGRALES

2 Formules de Taylor

Théorème 6 (Formule de Taylor avec reste intégrale)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, $a \in I$. Alors

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Théorème 7 (Inégalités de Taylor-Lagrange)

Soit I un intervalle de $\mathbb{K}$, soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et $a \in I$. Alors si $|f^{(n+1)}|$ est borné par $M > 0$ sur I ,

$$\forall x \in I, \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Théorème 8 (Formule de Taylor-Young)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $a \in I$. Alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^k).$$

3 Calcul approché d'intégrales

Proposition 9

1. Soit f lipschitzienne sur $[a, b]$ de constante de Lipschitz K . Alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$$

et $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$

Plus précisément.

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right| \leq \frac{K(b-a)^2}{2N}.$$

2. (généralisation) Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{K})$. Alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$$

et $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$

Remarque 10

Une seule chose à retenir : si f est continue par morceaux,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt.$$