

Chapitre 17 – Algèbre linéaire 1

1 Espaces vectoriels

1.1 Structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

Définition 1

Un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel est un ensemble E muni d'une loi de composition interne $+$ et d'une *loi de composition externe*, i.e. d'une application $\begin{cases} \mathbb{K} \times E \rightarrow E \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda.x \end{cases}$ telles que

1. $(E, +)$ est un groupe abélien
2. La loi externe est doublement distributive :
 - sur la loi $+$ de E : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$
 - sur la loi $+$ de $\mathbb{K}$: $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$
3. pour tout x de E , $1.x = x$
4. pour tous λ et μ de $\mathbb{K}$, $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$.

Les éléments de E sont appelés vecteurs, les éléments de $\mathbb{K}$ sont des scalaires.

Définition 2 (Espace vectoriel produit)

Soient $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \dots, E_n$ n $\mathbb{K}$ -ev. On définit sur $E = E_1 \times \dots \times E_n$ une structure de $\mathbb{K}$ -ev par : $\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ et $\lambda.(x_1, \dots, x_n) = (\lambda.x_1, \dots, \lambda.x_n)$.

Proposition 3

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$.

1. $\lambda.0_E = 0_E$.
2. $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$.
3. $(-1).x = -x$.
4. $\lambda.x = 0_E \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E)$.

Définition 4

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, $x \in E$.

1. si $(x_1, \dots, x_n)$ sont n éléments de E , on dit que x est combinaison linéaire de $(x_1, \dots, x_n)$ s'il existe n éléments de $\mathbb{K}$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$.
2. On dit qu'une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ indexé par I (ensemble éventuellement infini) est presque nulle, ou à support fini, si tous les éléments de la famille sont nuls, sauf un nombre fini d'entre eux, i.e. : $\exists n \in \mathbb{N}, \exists (i_1, \dots, i_n) \in I^n, \forall i \in I, i \notin \{i_1, \dots, i_n\} \Rightarrow \lambda_i = 0$.
3. Si I est un ensemble (éventuellement infini) et $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E , on dit que x est combinaison linéaire des $(x_i)_{i \in I}$ s'il existe une famille à support fini de scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$ telle que $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$.

1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 5

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $F \subset E$. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E (on abrège en sev) si F est stable par $+$ et $\cdot$, et qu'alors $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -ev.

Proposition 6 (Caractérisation des sous-espaces vectoriels)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $F \subset E$. F est un sev de E ssi $0_E \in F$ et $\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda x + \mu y \in F$.

Proposition 7

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et F un sev de E . Alors F est stable par combinaison linéaire quelconque, i.e. $\forall (x_1, \dots, x_n) \in F^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \in F$.

Proposition 8

1. Si F et G sont deux sev de E , $F \cap G$ est un sev de E .
2. Si I est un ensemble et $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de sev de E , $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sev de E .
3. Si F et G sont deux sev de E , $F \cup G$ est un sev de E , alors soit $F \subset G$, soit $G \subset F$.

Définition 9

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, A une partie de E .

1. Le sous-espace vectoriel engendré par A , noté $\text{Vect}(A)$, est le sous-espace vectoriel défini par l'une des définitions équivalentes suivantes
 - (a) (définition externe) $\text{Vect}(A)$ est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels contenant A ($\text{Vect}(A)$ est le plus petit sev contenant A)
 - (b) (définition interne) $\text{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A .

On définit de même le sous-espace vectoriel engendré par une famille de E :
2. Dans le cas où $A = (x_i)_{i \in I}$, on notera $\text{Vect}(A) = \text{Vect}(x_i)_{i \in I}$.
3. Si A est un ensemble fini, i.e. $A = \{x_1, \dots, x_n\}$, ou une famille finie, i.e. $A = (x_1, \dots, x_n)$, on aura tendance à noter $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

Proposition 10

1. Une partie A de E vérifie $A = \text{Vect}(A)$ ssi A est un sev de E .
2. Si $A \subset B \subset E$, alors $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.
3. Si $x \in \text{Vect}(A)$, $\text{Vect}(A \cup \{x\}) = \text{Vect}(A)$.
4. Si y est une combinaison linéaire des vecteurs de $A \cup \{x\}$ avec un coefficient non nul devant x , alors $\text{Vect}(A \cup \{x\}) = \text{Vect}(A \cup \{y\})$.

Pour les familles de vecteurs, on utilise la concaténation : $(x_1, \dots, x_n) \uplus (y_1, \dots, y_p) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$.

1.3 Familles libres, génératrices, bases

Définition 11 (Famille génératrice)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Une partie A de E est dite génératrice de E si $E = \text{Vect}(A)$.
Une famille $\{x_i, i \in I\}$ de E est dite génératrice de E si $E = \text{Vect}(x_i)_{i \in I}$.

Proposition 12

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev,

1. Si $A \subset B \subset E$, et A est génératrice de E alors B est génératrice.
2. Si $x \in \text{Vect}(A)$, et $A \cup \{x\}$ est génératrice, alors A est génératrice.

3. Si y est une combinaison linéaire des vecteurs de $A \cup \{x\}$ avec un coefficient non nul devant x , et $A \cup \{x\}$ est génératrice, alors A est génératrice.
4. Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E et $(y_j)_{j \in J}$ est une famille de E , $(y_j)_{j \in J}$ est génératrice de E si, et seulement si chacun des $(x_i)_{i \in I}$ est combinaison linéaire des $(y_j)_{j \in J}$.

Définition 13 (Famille libre)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, $\{x_i, i \in I\}$ une famille de vecteurs de E .

1. $\{x_i, i \in I\}$ est dite libre si pour toute famille presque nulle $(\lambda_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, $\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0\right) \Rightarrow (\forall i \in I, \lambda_i = 0)$.
2. Si une famille n'est pas libre, on dit qu'elle est liée.
3. Une combinaison linéaire nulle à coefficient non tous nuls d'une famille non libre est appelée **relation de liaison** entre les éléments de cette famille.
4. Deux vecteurs liés sont dits colinéaires. Trois vecteurs liés sont dits coplanaires.

Proposition 14

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E .

1. Si $\exists i_0 \in I, x_{i_0} = 0_E$, $(x_i)_{i \in I}$ est liée.
2. Si $\exists (i, j) \in I^2, i \neq j$ et $x_i = x_j$, $(x_i)_{i \in I}$ est liée.
3. $(x_i)_{i \in I}$ est liée si et seulement si il existe $i_0 \in I$ tel que x_{i_0} est combinaison linéaire des $(x_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$.
4. Si $(x_i)_{i \in I}$ est libre et que $y \notin \text{Vect}(x_i)_{i \in I}$, alors $(x_i)_{i \in I} \cup \{y\}$ est libre.
5. $(x_i)_{i \in I}$ est libre si et seulement si tout élément de $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des $(x_i)_{i \in I}$.

Définition 15

Soit $P_1, \dots, P_n$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que $(P_1, \dots, P_n)$ est à degrés échelonnés si $\deg(P_1) < \deg(P_2) < \dots < \deg(P_n)$.

Proposition 16

Toute famille de polynômes non nuls à degrés échelonnés est libre.

Définition 17

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Une famille de E est une base de E si elle est libre et génératrice de E .

Proposition 18

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . La famille $(x_i)_{i \in I}$ est $\begin{cases} \text{génératrice} \\ \text{libre} \\ \text{une base} \end{cases}$ si et seulement si

pour tout y de E , il existe $\begin{cases} \text{au moins} \\ \text{au plus} \\ \text{exactement} \end{cases}$ une famille presque nulle $(\lambda_i)_{i \in I}$ telle que $y = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$.

1.4 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 19

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, F et G deux sev de E . La somme de F et de G , notée $F + G$, est le sous-espace vectoriel $F + G = \{f + g, f \in F, g \in G\}$.

Proposition 20

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, F et G deux sev de E . Alors $F + G = \text{Vect}(F \cup G)$ et, de manière plus générale, si A, B sont des parties de E , $\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$.

Définition 21

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, F et G deux sev de E . La somme entre F et G est dite directe si pour tout x de $F + G$ il existe un unique f de F et un unique g de G tels que $x = f + g$. On note alors la somme $F \oplus G$.

Proposition 22

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, F et G deux sev de E . F et G sont en somme directe si, et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Définition 23

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, F et G deux sev de E . F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $F \oplus G = E$, i.e. $\forall x \in E, \exists!(f, g) \in F \times G, x = f + g$.

Proposition 24

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, F et G deux sev de E .

1. Si $\{f_i, i \in I\}$ est une famille génératrice de F et $\{g_j, j \in J\}$ est une famille génératrice de G , alors $\{f_i, i \in I\} \cup \{g_j, j \in J\}$ est une famille génératrice de $F + G$.
2. Si F et G sont en somme directe, si $\{f_i, i \in I\}$ est une famille libre de F et $\{g_j, j \in J\}$ est une famille libre de G , alors $\{f_i, i \in I\} \cup \{g_j, j \in J\}$ est une famille libre de $F \oplus G$.
3. Si $\{f_i, i \in I\}$ est une base de F et $\{g_j, j \in J\}$ est une base de G , alors F et G sont supplémentaires **si et seulement si** $\{f_i, i \in I\} \cup \{g_j, j \in J\}$ est une base de E .

Proposition 25 (Associativité de la somme)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, F, G et H 3 sous-espaces vectoriels de E .

1. $F + (G + H) = (F + G) + H$
2. Si $G \cap H = \{0_E\}$, si $F \cap (G \oplus H) = \{0_E\}$, alors $F \cap G = \{0_E\}$ et $(F \oplus G) \cap H = \{0_E\}$.
Def. Dans ce cas, on dit que F, G et H sont en somme directe et on note la somme directe $F \oplus G \oplus H$, sans parenthèse.

2 Applications linéaires

2.1 Généralités

Définition 26

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev.

1. Une *application linéaire* entre E et F est une application $f : E \rightarrow F$ telle que

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

2. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .
3. Un *endomorphisme* est une application linéaire de E dans E . On note leur ensemble $\mathcal{L}(E)$.
4. Un *isomorphisme* est une application linéaire bijective.
5. Un *automorphisme* est un endomorphisme bijectif. L'ensemble des automorphismes d'un espace vectoriel E est appelé groupe linéaire et noté $GL(E)$.
6. Une *forme linéaire* est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Proposition 27

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -ev, $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. $f(0_E) = 0_F$.
2. $\forall (x_i)_{i \in I} \in E^I, \forall (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ presque nulle, $f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i)$.

Définition 28

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2, A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application $\left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mapsto \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X \mapsto AX \end{array} \right|$ est linéaire et est appelée application canoniquement associée à A .

Définition 29 (Opération sur les applications linéaires)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev, f et g deux éléments de $\mathcal{L}(E, F)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. On définit $f + g$ par $\forall x \in E, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
2. On définit $\lambda.f$ par $\forall x \in E, (\lambda.f)(x) = \lambda.(f(x))$.

On munit ainsi $\mathcal{L}(E, F)$ d'une structure d'espace vectoriel.

Proposition 30

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ -ev, f dans $\mathcal{L}(E, F)$, g dans $\mathcal{L}(F, G)$.

1. $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G .
2. Si u est dans $\mathcal{L}(E, F)$ et v est dans $\mathcal{L}(F, G)$, $g \circ (f + u) = g \circ f + g \circ u$ et $(g + v) \circ f = g \circ f + v \circ f$.

Proposition 31

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau, non intègre et non commutatif.

Définition 32

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}$. On définit $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$ (par convention, $f^0 = \text{Id}_E$).

Définition 33

Un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $(A, +, \cdot)$ est une algèbre s'il est muni d'une loi $\times$ telle que $(A, +, \times)$ est un anneau, et tel que $\forall (x, y) \in A^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot (x \times y) = (\lambda \cdot x) \times y = x \times (\lambda \cdot y)$.

Proposition 34

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, f et g dans $\mathcal{L}(E)$ $n \in \mathbb{N}$. **SI** $f \circ g = g \circ f$, les identités de Newton et de Bernoulli sont vraies.

Proposition 35

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

1. Pour tout isomorphisme f de E dans F , f^{-1} est linéaire.
2. $(GL(E), \circ)$ est un groupe.

2.2 Noyau et image

Proposition 36

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, A un sev de E et B un sev de F .

1. $f(A)$ est un sev de F
2. $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$ est un sev de E .

Définition 37

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev, $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Le noyau de f , noté $\ker(f)$, est $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E, f(x) = 0_F\}$.
2. L'image de f , notée $\text{Im}(f) = \{f(x), x \in E\} = \{y \in F, \exists x \in E, y = f(x)\}$.

Proposition 38

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev, $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.
2. f est surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = F$.

Proposition 39

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, S un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E . Alors f réalise un isomorphisme de S sur $\text{Im}(f)$, c'est-à-dire que l'application $g : \begin{cases} S \rightarrow \text{Im}(f) \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ est un isomorphisme. On résume cette proposition en « toute application réalise un isomorphisme d'un supplémentaire de son noyau sur son image. »

Proposition 40

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $y \in F$ et l'équation $f(x) = y$, d'inconnue $x \in E$. Alors

1. ou bien $y \notin \text{Im}(f)$ et l'équation n'a pas de solution,
2. ou bien $y \in \text{Im}(f)$ et, si x_0 est un antécédent de y par f , l'ensemble des solutions de l'équation est $\{x_0 + \omega, \omega \in \ker(f)\}$.
On dit que cet ensemble est le sous-espace affine passant par ω et dirigé par $\ker(f)$.

Proposition 41

Soient E, F et G trois espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et g dans $\mathcal{L}(F, G)$. Alors $g \circ f = 0$ ssi $\text{Im}(f) \subset \ker(g)$.

2.3 Applications linéaires et familles

Proposition 42

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev, $(e_i)_{i \in I}$ une base de E , $(f_i)_{i \in I}$ une famille de F . Il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que : $\forall i \in I, u(e_i) = f_i$.

En d'autres termes, « une application linéaire est déterminée de manière unique par l'image d'une base ».

Proposition 43

Soient E et F deux espaces vectoriels, A et B deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = A \oplus B$. Soit $u \in \mathcal{L}(A, F)$ et $v \in \mathcal{L}(B, F)$. Alors il existe une unique $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f|_A = u$ et $f|_B = v$.

Proposition 44

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev, $(e_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E , $f \in \mathcal{L}(E, F)$

1. si $(e_i)_{i \in I}$ est libre et si f est injective alors $(f(e_i))_{i \in I}$ est libre.
2. si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E , alors si f est injective ssi $(f(e_i))_{i \in I}$ est libre.
3. si $(e_i)_{i \in I}$ est génératrice de E , f est surjective ssi $(f(e_i))_{i \in I}$ est une famille génératrice de F .
4. si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E , f est bijective ssi $(f(e_i))_{i \in I}$ est une base de F .

2.4 Projections et symétries

Définition 45

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, F et G deux sev supplémentaires de E . Pour tout x de E , il existe un unique couple $(p(x), q(x))$ de $F \times G$ tel que $x = p(x) + q(x)$. Alors p et q sont linéaires. On dit que p est la projection sur F parallèlement à G et que q est la projection sur G parallèlement à F .

Proposition 46

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, F et G deux sev supplémentaires de E , p la projection sur F parallèlement à G , q la projection sur G parallèlement à F .

1. $p + q = \text{Id}_E$,
2. $\text{Im}(p) = \ker(p - \text{Id}_E) (= \ker(q) = F)$,
3. $p \circ p = p$,
4. $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Proposition 47

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$.

1. Si p est une projection, alors $p \circ p = p$.
2. Si $p \circ p = p$, alors $E = \ker(p) \oplus \text{Im}(p)$ et p est la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

Définition 48

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, F et G deux sev supplémentaires. Pour tout x de E , il existe un unique couple $(p(x), q(x))$ de $F \times G$ tel que $x = p(x) + q(x)$. L'application $s : x \mapsto p(x) - q(x)$ est linéaire et est appelée symétrie par rapport à F parallèlement à G .

Proposition 49

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, F et G supplémentaires, s la symétrie par rapport à F parallèlement à G , p la projection sur F parallèlement à G , $q = \text{Id}_E - p$. Alors

1. $s = p - q = 2p - \text{Id}_E$.
2. $-s$ est la symétrie par rapport à $G //$ à F .
3. $F = \ker(s - \text{Id}_E) = \{x \in E, s(x) = x\}$,
4. $G = \ker(s + \text{Id}_E) = \{x \in E, s(x) = -x\}$,

Proposition 50

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$.

1. Si s est une symétrie, alors $s \circ s = \text{Id}_E$.
2. Si $s \circ s = \text{Id}_E$, alors $E = \ker(s - \text{Id}_E) \oplus \ker(s + \text{Id}_E)$, et s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(s + \text{Id}_E)$.

2.5 Formes linéaires et hyperplans

Proposition 51 (et def)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, $(e_i)_{i \in I}$ une base de E .

Si $x \in E$, alors on dispose d'une unique famille presque nulle $(\varphi_i(x))_{i \in I}$, telle que $x = \sum_{i \in I} \varphi_i(x) \cdot e_i$. Alors, pour tout i dans I , $\varphi_i \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. **Def.** On appelle la famille $(\varphi_i)_{i \in I}$ la famille des formes linéaires coordonnées associée à la base $(e_i)_{i \in I}$. On note parfois $\forall i \in I, \varphi_i = e_i^*$.

Définition 52

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Un hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Proposition 53

1. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, H un hyperplan de E , a un vecteur non nul de E . Si $a \notin H$, alors $H \oplus \text{Vect}(a) = E$.
2. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, D une droite de E et H un supplémentaire de D . Alors H est un hyperplan.

Proposition 54

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, φ et ψ deux formes linéaires non nulles. Alors $\ker(\varphi) = \ker(\psi)$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\psi = \lambda\varphi$.

2.6 Commutation et stabilisation

Définition 55

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, F un sev de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u stabilise F si $u(F) \subset F$.

Proposition 56

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$. Si $u \circ v = v \circ u$, alors u stabilise $\ker(v)$ et $\text{Im}(v)$.

Proposition 57 (Jolie propriété HP, pour bien finir le chapitre)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. Les seuls endomorphismes qui stabilisent toutes les droites sont les homothéties.
2. Si on suppose que tout sev de E admet un supplémentaire, alors les seuls $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\forall v \in \mathcal{L}(E), u \circ v = v \circ u$ sont les homothéties.