

TD 18 Intégration

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. ●●○ Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, n dans $\mathbb{N}^*$ tels que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \int_0^1 t^k f(t) dt = 0.$$

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_0^1 P(t)f(t)dt = 0$.
2. Montrer que f s'annule au moins $n + 1$ fois sur $[0, 1]$.

Exercice 2. Autour de la valeur moyenne d'une fonction. ●●○ Si $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, on définit sa valeur moyenne comme

$$VM_{[a,b]}(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

1. (premier théorème de la moyenne) Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = VM_{[a,b]}(f)$.
2. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe sur $[0, 1]$.
3. (second théorème de la moyenne) Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, avec g positive sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe c dans $[a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c) \int_a^b g(t)dt.$$

Retrouver à l'aide de ce résultat le premier théorème de la moyenne.

Exercice 3. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On note, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \int_0^1 t^n f(t) dt \text{ et } v_n = \int_0^1 f(t^n) dt.$$

1. Déterminer les limites de (u_n) et (v_n) quand n tend vers $+\infty$.
2. Lorsque f est $\mathcal{C}^1$ et $f(1) \neq 0$, déterminer un équivalent de (v_n) .

Exercice 4. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, telle que $|f|$ est bornée par un réel M_0 et $|f''|$ est bornée par un réel M_2 .

1. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange entre x et $x + h$ à l'ordre 2, montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, pour tout $h > 0$, $|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + h\frac{M_2}{2}$.
2. En déduire que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

Exercice 5. ●○○ Déterminer les limites, quand n tend vers $+\infty$, des suites définies par

$$1. u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha n + \beta k} \text{ (avec } \alpha > 0, \beta > 0) \qquad 2. v_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

2 Calculs d'intégrales

Exercice 6. ●○○ Calculer les intégrales suivantes :

$$1. I_1 = \int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$$

$$2. I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x + \sin(x)} dx$$

$$3. I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{12}} \tan(4x) dx$$

$$4. I_4 = \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$$

Exercice 7. ●●○ Calculer les intégrales suivantes :

$$1. J_1 = \int_{2a}^{3a} \frac{t^3}{t^2 - a^2} dt \quad (a > 0)$$

$$2. J_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^4(x)}{\sin^6(x)} dx$$

$$3. J_3 = \int_1^2 x\sqrt{x} \ln(x) dx$$

$$4. J_4 = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx \quad (\text{poser } x = \sin^2(t)).$$

$$5. J_5 = \int_0^1 \sqrt{2x - x^2} dx$$

$$6. J_6 = \int_0^1 e^{\arcsin(x)} dx$$

Exercice 8. ●●○ Soit $f : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante. Montrer que $\int_a^b f(t) dt + \int_\alpha^\beta f^{-1}(t) dt = b\beta - a\alpha$.

3 Intégrales fonctions des bornes

Exercice 9. ●○○ Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, continue. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.

Exercice 10. ●○○ Soit $\varphi : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$.

1. Montrer que φ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x)$.
3. Montrer que l'on peut prolonger φ par continuité en 0 et étudier la dérivabilité de ce prolongement.
4. Démontrer que $\frac{\varphi(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.
5. Déterminer la limite de φ en $-\infty$.
6. Tracer la courbe $\mathcal{C}_\varphi$ de φ .

Exercice 11. ●●○ Soit $k \in]0, 1[$. On définit

$$F : x \mapsto \int_0^x \sqrt{1 - k \sin^2(t)} dt.$$

1. Déterminer le domaine D de définition de F et montrer que F est impaire.
- On pose $a = F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
2. Calculer $F(\pi)$ en fonction de a .
 3. Montrer que F est dérivable et strictement monotone sur D .
 4. (i) Montrer que $\forall x \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, F(x + n\pi) = F(x) + 2na$.
(ii) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$.

4 Intégrales et inégalités

Exercice 12. ●○○ Montrer $\frac{\ln 2}{\sqrt{3}} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\tan x}{x} \leq \sqrt{3} \ln 2$.

Exercice 13. ●●○ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\frac{1}{n+1} \leq \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt \leq \frac{2}{n+1}$.

Exercice 14. ●●○

1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_a^b f(x) \sin(nx) dx$ et $\int_a^b f(x) \cos(nx) dx$ tendent vers 0 quand n tend $+\infty$.
2. Déterminer deux réels α et β tels que $\forall n \geq 1, \int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$.
3. Retrouver ainsi la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 15. ●●○ Soit $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que si $\int_0^\pi f(t) \sin t dt = 0$, alors il existe $a \in]0, \pi[$ tel que f s'annule en a .
2. Montrer que si $\int_0^\pi f(t) \sin t dt = \int_0^\pi f(t) \cos t dt = 0$, alors f s'annule 2 fois sur $]0, \pi[$.
(indice : on pourra regarder $\int_0^\pi f(t) \sin(t-a) dt$).

Exercice 16. ●●○ Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}_{\text{pm}}$. Montrer que

$$\sqrt{1 + \text{VM}_{[0,1]}(f)^2} \leq \int_{[0,1]} \sqrt{1 + f^2} \leq \sqrt{1 + \text{VM}_{[0,1]}(f^2)}$$

Exercice 17. ●●○ Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{C}^1$, concave.

1. Montrer que

$$(b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \leq \int_a^b f(t) dt \leq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

2. Montrer que les inégalités persistent en supposant f seulement continue (on utilisera des sommes de Riemann).

Exercice 18. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 2\pi])$ une fonction convexe. Montrer que

$$\forall n > 0, \quad a_n = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \geq 0.$$

Exercice 19. *Inégalité de Poincaré.* ●●○ Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ avec $f(0) = 0$. Montrer que

$$\int_0^1 f(t)^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_0^1 f'(t)^2 dt$$

Exercice 20. ●●● Si $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, si $p \in \mathbb{N}^*$, on définit la norme L^p de f comme

$$\|f\|_{L^p} = \sqrt[p]{\int_0^1 |f(t)|^p dt}.$$

1. Démontrer que $\|f\|_{L^p}$ est une norme sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.
2. Démontrer que $\|f\|_{L^p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \|f\|_{\infty, [0,1]}$.

5 Suites et intégrales (sommes de Riemann & Cie)

Exercice 21. ●●○ Soit, pour $n \geq 0$, $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)^n dx$.

1. Étudier la monotonie de (u_n) .
2. En calculant $u_{n+2} + u_n$, déterminer la limite ℓ de u_n .
3. Donner un équivalent simple de $u_n - \ell$.

Exercice 22. ●●○ Soit $f : [a, b+1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 1$ par

$$u_n = n \int_a^b \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right) dx.$$

Exercice 23. ●●○

1. Déterminer les limites suivantes (quand n tend vers $+\infty$)

(a) $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right),$

(b) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}},$

(c) $\frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (n+k)},$

(d) $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k},$

(e) $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (\ln k^k - \ln n^k),$

(f) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right).$

2. Soit $p > 0$. Déterminer un équivalent, quand n tend vers $+\infty$, de $\sum_{k=1}^n k^p$.

Exercice 24. ●●○ Montrer que $\frac{e}{4n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

6 Formules de Taylor

Exercice 25. ●●○

1. Montrer que pour tout x dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.
2. Démontrer que $\forall x \in [0, 1], x^2 - \frac{1}{3}x^4 \leq \sin^2 x \leq x^2$.
3. En déduire la limite de la suite $\left(\sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 26. ●●○ Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, telle que $|f|$ est bornée par un réel M_0 et $|f''|$ est bornée par un réel M_2 . Démontrer que $|f'|$ est bornée par $\sqrt{2M_0M_2}$ (**attention !** ça n'est pas tout à fait l'exercice corrigé en cours !)

Exercice 27. ●●○ Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré impair tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|.$$

1. Montrer que f est la fonction nulle.
2. Le résultat reste-t-il vrai si $\deg(P)$ est pair ?

Indications

- 1
 1. Utiliser la linéarité.
 2. Raisonner par l'absurde et construire un bon polynôme.
- 2
 1. Utiliser le TVI avec f et $VM_{[a,b]}(f)$
 2. Poser $g : t \mapsto f(t) - t$ et calculer l'intégrale de g sur $[0, 1]$.
 3. Utiliser le TVI avec f pour la valeur $\frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)}$.
- 3
 1. Pour (v_n) , prendre un $\varepsilon > 0$, écrire que $\int_0^1 = \int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1-\varepsilon}^1$.
 2. Faire une IPP !
- 4
 1. Utiliser convenablement l'inégalité triangulaire.
 2. Prendre h qui minimise le majorant trouvé.
- 5 Dans cet exercice, sortir un $\frac{1}{n}$ et faire apparaître une somme de Riemann. S'il y a un produit, en prendre le ln.
- 6
 1. Intégration directe.
 2. Linéariser le cosinus.
 3. Utiliser que $\tan = \sin / \cos$ et reconnaître (presque) u'/u .
 4. Ou bien faire un changement de variables $u = e^x$, ou reconnaître une intégration directe (coup du e^x en haut).
- 7
 - (i) Effectuer une décomposition en éléments simples.
 - (ii) Faire apparaître $u^n u'$ avec $u = \tan$!
 - (iii) Faire une IPP, en posant $u'(x) = x^{\frac{3}{2}}$, et $v(x) = \ln(x)$.
 - (iv) Poser, comme indiqué, $t = \text{Arcsin}(\sqrt{x})$.
 - (v) Poser $u = x - 1$.
 - (vi) Poser $u = \text{Arcsin}(x)$.
- 8 Utiliser un bon changement de variables.
- 9 Utiliser la définition d'une dérivée avec le taux d'accroissement.
- 10
 1. Utiliser des primitives.
 2. Encadrer l'intégrale : encadrer l'un des deux termes parmi e^t ou $\frac{1}{t}$, et intégrer ce qui reste.
 3. Utiliser le théorème de la limite de la dérivée.
 4. Minorer e^t par e^x .
 - 5.
- 11
 1. Faire un changement de variables.
 2. Séparer l'intégrale en deux et poser $s = t - \pi$.
 3. Utiliser la définition d'une primitive.
 4. (i) Écrire $\int_0^{x+n\pi} = \int_0^{n\pi} + \int_{n\pi}^{x+n\pi}$
 (ii) Utiliser le théorème de la limite monotone.
- 12 Utiliser juste la formule de Taylor...
- 13 Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1+t^2}{2}$ et chercher à l'encadrer entre deux bonnes fonctions affines.
- 14
 1. Faire une intégration par parties, et majorer proprement chaque terme.

2. On doit trouver $\alpha = -1$ et $\beta = \frac{1}{2\pi}$.
3. Utiliser que $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2) \sum_{n=1}^N \cos(nt) dt$, recalculer la somme des $\cos(nt)$. Penser aussi au fait que $\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\sin(b+a) + \sin(b-a))$.
- 15
 1. Supposer que f ne s'annule pas et aboutir à une contradiction.
 2. Utiliser que f s'annule en un réel a et considérer $\int_0^\pi f(t) \sin(t-a) dt$.
- 16 L'inégalité de droite est évidente. Pour l'inégalité de gauche, penser à considérer les quantités $\sqrt{1+f^2} - f$ et $\sqrt{1+f^2} + f$.
- 17 Pour la première question, utiliser le fait que la courbe de f est au-dessus d'une certaine corde et sous une certaine tangente.
- 18 Faire des IPP, puis un changement de variables $u = nt$, puis découper l'intégrale.
- 19 Écrire l'expression de $f(x)$ en fonction de f' et appliquer directement l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
- 20
 - déjà commencer par montrer que l'on peut se ramener à f positive, non identiquement nulle, de maximum égal à 1.
 - ensuite, montrer que dans le cas ci-dessus, $\sqrt[p]{\int_0^1 f(t)^p dt} \leq 1$ et que pour tout ε , $\sqrt[p]{\int_0^1 g(t)^p dt} \geq 1 - \varepsilon$ à pcr.
- 21
 1. Utiliser le fait que $|\tan(t)| < 1$.
 2. Penser à **d'abord** démontrer que (u_n) converge.
 3. Utiliser la décroissance de u_n et le calcul de $u_n + u_{n+2}$.
- 22 Utiliser une primitive de f et faire apparaître un taux de variation.
- 23
 1. Utiliser les techniques vues en cours : sortir un $\frac{1}{n}$, prendre le ln pour la troisième limite.
 2. Multiplier et diviser par $n^p \times n$, et faire apparaître une somme de Riemann.
- 25 Utiliser la formule de Taylor avec reste intégrale !
- 26 Ici, ne pas utiliser une mais **deux** inégalités de Taylor-Lagrange : entre x et $x+h$, **puis** entre $x-h$ et x .