

Espaces vectoriels et applications linéaires

Révisions sur le programme précédent

Intégration

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

c) Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

On suppose construite l'intégrale pour le moment.

Interprétation géométrique de l'intégrale.

Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t) dt$.

Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale.

Inégalité triangulaire intégrale : $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.

Relation de Chasles.

Extension de la notation $\int_a^b f(t) dt$ au cas où $b \leq a$.

Propriétés correspondantes.

Si f est continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = 0$.

Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0. Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période.

Valeur moyenne d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

d) Sommes de Riemann

Pour f continue par morceaux sur le segment $[a, b]$,

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Interprétation géométrique.

Démonstration exigible pour f lipschitzienne.

f) Formules de Taylor globales

Formule de Taylor avec reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange.

L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme.

On souligne la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales.

Organisation de la colle.

- Cours d'intégration (nous n'avons pas **construit** l'intégrale, seulement utilisé ses propriétés).
- Exercices d'intégration et d'algèbre linéaire (toujours sans dimension !)

Exemples de questions de cours

1. Éventuellement une question de cours sur les projecteurs, symétries ou les hyperplans.
2. Une fonction continue, positive, d'intégrale nulle sur $[a, b]$, est nulle sur $[a, b]$.
3. Inégalité de Cauchy-Schwarz (pour des fonctions continues), cas d'égalité.
4. Formule de Taylor avec reste intégral.
5. Inégalité de Taylor-Lagrange.
6. Formule de Taylor-Young (dans le cas $\mathcal{C}^n$).
7. Convergence des sommes de Riemann dans le cas lipschitzien.