

TD 18 Intégration

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. ●●○ Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, n dans $\mathbb{N}^*$ tels que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \int_0^1 t^k f(t) dt = 0.$$

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_0^1 P(t)f(t)dt = 0$.

Correction

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. Alors P s'écrit sous la forme $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, avec $(a_0, \dots, a_n)$ $n+1$ réels. Alors

$$\int_0^1 P(t)f(t)dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^n a_k t^k f(t)dt = \sum_{k=0}^n \int_0^1 a_k t^k f(t)dt = 0,$$

par l'hypothèse de début d'exercice.

2. Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[0, 1]$.

Correction

Supposons que f s'annule au plus n fois sur $[0, 1]$. Soient $x_1, \dots, x_m$ les points en lesquels f change de signe. Comme f est continue, si elle change de signe, elle s'annule. Donc $m \leq n$. Posons $P(X) = \prod_{k=1}^m (X - x_k)$. Alors P change de signe en $x_1, \dots, x_m$. Donc Pf est de signe constant sur

$[0, 1]$. Or, $\deg(P) \leq m \leq n$. Donc $\int_0^1 P(t)f(t)dt = 0$, donc, comme Pf est continue et de signe constant, $Pf = 0$. Donc f est nulle en tout point différent de $(x_1, \dots, x_m)$, donc f s'annule une infinité de fois, absurde!

Donc f s'annule au moins $n+1$ fois.

Exercice 2. Autour de la valeur moyenne d'une fonction. ●●○ Si $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, on définit sa valeur moyenne comme

$$VM_{[a,b]}(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt.$$

1. (premier théorème de la moyenne) Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = VM_{[a,b]}f$.

Correction

Soient m et M le minimum et le maximum de f sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b m dt \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b M dt,$$

i.e. $m \leq \text{VM}_{[a,b]}(f) \leq M$. Soient α un antécédent de m et β un antécédent de M . Alors f est continue, $\text{VM}_{[a,b]}(f)$ est entre $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel c entre α et β tel que $f(c) = \text{VM}_{[a,b]}(f)$.

2. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe sur $[0, 1]$.

Correction

Posons $g : t \mapsto f(t) - t$. Calculons

$$\int_0^1 g(t)dt = \int_0^1 f(t) - t dt = \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} - \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Si g ne s'annulait pas sur $[0, 1]$, alors g serait de signe constant, continue, et $\int_0^1 g(t)dt = 0$, donc g serait nulle sur $[0, 1]$, absurde. Donc g s'annule sur $[0, 1]$. Donc on dispose de $x_0 \in [0, 1]$ tel que $g(x_0) = 0$, i.e. de $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

3. (second théorème de la moyenne) Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, avec g positive sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe c dans $[a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c) \int_a^b g(t)dt.$$

Retrouver à l'aide de ce résultat le premier théorème de la moyenne.

Correction

Soient m et M le minimum et le maximum de f sur $[a, b]$, α un antécédent de m et β un antécédent de M . Alors, par positivité de g , pour tout t dans $[a, b]$, $f(\alpha)g(t) \leq f(t)g(t) \leq f(\beta)g(t)$, donc, en intégrant,

$$f(\alpha) \int_a^b g(t)dt \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq f(\beta) \int_a^b g(t)dt,$$

donc, comme on peut supposer g non nulle (sinon la question est évidente), $\int_a^b g(t)dt > 0$, donc

$$f(\alpha) \leq \frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt} \leq f(\beta),$$

donc $\frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt}$ est entre $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ donc on dispose de c entre α et β tel que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt},$$

i.e.

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c) \int_a^b g(t)dt.$$

En prenant pour g la fonction constante égale à 1, on retrouve la première question.

Exercice 3. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On note, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \int_0^1 t^n f(t) dt \text{ et } v_n = \int_0^1 f(t^n) dt.$$

1. Déterminer les limites de (u_n) et (v_n) quand n tend vers $+\infty$.

Correction

Pour la première limite, comme f est continue elle est bornée sur $[0, 1]$, par $M > 0$, et on écrit juste que

$$|u_n| \leq \int_0^1 t^n M dt = \frac{M}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Pour la deuxième, l'idée est que quand n tend vers $+\infty$, $f(t^n) \rightarrow f(0)$, donc on veut dire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t^n) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0).$$

On étudie alors

$$v_n - f(0) = \int_0^1 f(t^n) - f(0) dt.$$

Là, une majoration n'est pas simple, car $f(t^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0)$ mais pas à la même vitesse pour tous les t . On fixe un $\varepsilon > 0$. On écrit alors que

$$v_n - f(0) = \int_0^{1-\varepsilon} f(t^n) - f(0) dt + \int_{1-\varepsilon}^1 f(t^n) - f(0) dt.$$

On a alors, en notant $M = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$

$$\left| \int_{1-\varepsilon}^1 f(t^n) - f(0) dt \right| \leq \int_{1-\varepsilon}^1 |f(t^n)| + |f(0)| dt \leq 2M\varepsilon.$$

Ensuite, l'idée est que pour tous les $t \leq 1 - \varepsilon$, t^n tend vite vers 0 que $(1 - \varepsilon)^n$. On prend alors $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [0, \delta]$, $|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$. On prend N tel que pour tout $n \geq N$, $(1 - \varepsilon)^n \leq \delta$. Alors pour tout $t \in [0, 1 - \varepsilon]$, pour tout $n \geq N$, $0 \leq t^n \leq (1 - \varepsilon)^n \leq \delta$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{1-\varepsilon} f(t^n) - f(0) dt \right| &\leq \int_0^{1-\varepsilon} |f(t^n) - f(0)| dt \\ &\leq \int_0^{1-\varepsilon} \varepsilon dt \leq (1 - \varepsilon)\varepsilon \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \geq N$, $|v_n - f(0)| \leq (2M + 1)\varepsilon$, donc $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0)$.

2. Lorsque f est $\mathcal{C}^1$ et $f(1) \neq 0$, déterminer un équivalent de (v_n) .

Correction

Là, on fait une IPP :

$$\begin{aligned} u_n &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} f(t) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} f'(t) dt \\ &= \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt. \end{aligned}$$

Par la question précédente, $\int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc

$$\frac{1}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n+1}\right),$$

$$\text{donc } u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(1)}{n}.$$

Exercice 4. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, telle que $|f|$ est bornée par un réel M_0 et $|f''|$ est bornée par un réel M_2 .

1. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$ à l'ordre 2, montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, pour tout $h > 0$, $|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + h\frac{M_2}{2}$.
2. En déduire que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

Exercice 5. ●○○ Déterminer les limites, quand n tend vers $+\infty$, des suites définies par

$$1. u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha n + \beta k} \text{ (avec } \alpha > 0, \beta > 0) \quad 2. v_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Correction

Pour u_n , on écrit

$$u_n = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha + \beta \frac{k}{n}},$$

somme de Riemann associée à la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\alpha + \beta t}$, entre 0 et 1. On sait alors qu'elle converge vers

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{\alpha + \beta t} dt = \frac{1}{\beta} (\ln(\alpha + \beta t) - \ln(\alpha)) = \frac{1}{\beta} \ln\left(1 + \frac{\beta}{\alpha} t\right).$$

Pour v_n , on pose $w_n = \ln(v_n)$. Alors

$$w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right),$$

somme de Riemann associée à la fonction $t \mapsto \ln(1 + t^2)$ entre 0 et 1. Alors w_n converge vers

$$\int_0^1 \ln(1 + t^2) dt,$$

qui se calcule en posant $u'(t) = 1$, $v(t) = \ln(1 + t^2)$, donc $u(t) = t$ et $v'(t) = \frac{2t}{1 + t^2}$, donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(1 + t^2) dt &= [t \ln(1 + t^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2}{1 + t^2} dt \\ &= \ln(2) - 2 \int_0^1 1 - \frac{1}{1 + t^2} dt \\ &= \ln(2) - 2 + 2\operatorname{Arctan}(1) - 2\operatorname{Arctan}(0) \\ &= \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Donc v_n converge vers $2e^{\frac{\pi}{2}-2}$.

2 Calculs d'intégrales

Exercice 6. ●○○ Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

3. $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{12}} \tan(4x) dx$

2. $I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x + \sin(x)} dx$

4. $I_4 = \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$

Correction

Pour I_1 , il suffit de faire une intégration directe :

$$I_1 = \int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \int_1^5 x^{-\frac{3}{2}} dx = \left[\frac{1}{-\frac{3}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}} \right]_1^5 = -2[1/\sqrt{x}]_1^5 = 2 - \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Pour I_2 , on remarque que $\cos^2(x/2) = \frac{1}{2}(1 + \cos(x))$, donc

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x + \sin(x)} dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(x)}{x + \sin(x)} dx = \frac{1}{2} [\ln|x + \sin(x)|]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ = \frac{1}{2} \left(\ln\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right).$$

Pour I_3 , on remarque que, comme $\tan = \frac{\sin}{\cos}$, une primitive de $\tan$ est $-\ln|\cos|$. Donc

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{12}} \tan(4x) dx = \left[\frac{-1}{4} \ln|\cos(4x)| \right]_0^{\frac{\pi}{12}} = -\frac{1}{4} \left(\ln \frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{\ln(2)}{4}.$$

Pour I_4 , on remarque que $\frac{1}{e^x + 1} = \frac{1 + e^x}{e^x + 1} - \frac{e^x}{e^x + 1} = 1 - \frac{e^x}{1 + e^x}$, donc on trouve facilement une primitive en $x \mapsto x - \ln(1 + e^x)$. Donc

$$I_4 = \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} = I_4 = \int_0^1 1 - \frac{e^x}{1 + e^x} dx = [x - \ln(1 + e^x)]_0^1 = 1 - \ln(1 + e) + \ln(2).$$

Exercice 7. ●●○ Calculer les intégrales suivantes :

1. $J_1 = \int_{2a}^{3a} \frac{t^3}{t^2 - a^2} dt \quad (a > 0)$

2. $J_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^4(x)}{\sin^6(x)} dx$

3. $J_3 = \int_1^2 x\sqrt{x} \ln(x) dx$

4. $J_4 = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$ (poser $x = \sin^2(t)$).

5. $J_5 = \int_0^1 \sqrt{2x - x^2} dx$

6. $J_6 = \int_0^1 e^{\text{Arcsin}(x)} dx$

Correction

(i) Pour J_1 , on effectue une décomposition en éléments simples, en pensant bien à commencer par une division euclidienne (attention, on a tendance à l'oublier) :

$$t^3 = (t^2 - a^2).t + a^2 t, \text{ donc } \frac{t^3}{t^2 - a^2} = t + \frac{a^2 t}{t^2 - a^2}.$$

Ensuite, on remarque que $t^2 - a^2 = (t - a)(t + a)$ donc que l'on dispose de α et β tels que $\frac{a^2 t}{t^2 - a^2} = \frac{\alpha}{t - a} + \frac{\beta}{t + a}$. En multipliant par $t - a$ et en évaluant en a , on obtient $\alpha = \frac{a^2}{2}$ et, de

même, $\beta = \frac{a^2}{2}$. Donc, finalement,

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{2a}^{3a} \frac{t^3}{t^2 - a^2} dt \\ &= \int_{2a}^{3a} t + \frac{a^2}{2(t-a)} + \frac{a^2}{2(t+a)} dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2} + \frac{a^2}{2} \ln|t-a| + \frac{a^2}{2} \ln|t+a| \right]_{2a}^{3a} \\ &= \frac{9a^2}{2} - \frac{4a^2}{2} + \frac{a^2}{2} (\ln(2a) - \ln(a)) + \frac{a^2}{2} (\ln(4a) - \ln(3a)) \\ &= \frac{5a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \ln(2) + \frac{a^2}{2} \ln(4/3). \end{aligned}$$

Finalement, $J_1 = \frac{5a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \ln \frac{8}{3}$.

Pour J_2 , on remarque que

$$J_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^6(x)}{\sin^6(x)} \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan(x)^{-6} \frac{1}{\cos^2(x)} dx.$$

On reconnaît $u^n u'$ avec $u = \tan$! D'où

$$J_2 = \left[-\frac{1}{5} \tan(x)^{-5} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{5} \left(\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)^{-5} - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-5} \right) = -\frac{1}{5} \left(\frac{1}{9\sqrt{3}} - 1 \right),$$

d'où $J_2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{45\sqrt{3}}$.

Pour calculer J_3 , on effectue une intégration par parties, en posant $u'(x) = x^{\frac{3}{2}}$, donc $u(x) = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$ et $v(x) = \ln(x)$ donc $v'(x) = \frac{1}{x}$. Donc

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_1^2 x\sqrt{x} \ln(x) dx \\ &= \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{5} \ln(2) - \left[\frac{4}{25} x^{\frac{5}{2}} \right]_1^2 \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{5} \ln(2) - \frac{16\sqrt{2}}{25} + \frac{4}{25} \end{aligned}$$

On pose, comme indiqué, $t = \text{Arcsin}(\sqrt{x})$. Quand $x = \frac{1}{4}$, $t = \text{Arcsin}(1/2) = \frac{\pi}{6}$. Quand $x = \frac{3}{4}$, $t = \text{Arcsin}(\sqrt{3}/2) = \frac{\pi}{3}$. Ensuite, $\sqrt{\frac{x}{1-x}} = \sqrt{\frac{\sin^2(t)}{1-\sin^2(t)}} = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$, car t est entre $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{3}$.

Enfin, $\frac{dx}{dt} = 2 \sin(t) \cos(t)$, donc

$$\begin{aligned} J_4 &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(t)}{\cos(t)} 2 \sin(t) \cos(t) dt \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2(t) dt \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt \\ &= \left[t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \left(\sin \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \right), \end{aligned}$$

donc $J_4 = \frac{\pi}{6}$.

Pour calculer $J_5 = \int_0^1 \sqrt{2x - x^2} dx$, on pense encore à un changement de variable en sin, mais on n'a pas exactement ce que l'on voudrait... Si on avait $1 - u^2$, cela serait plus pratique : mais, en posant $u = x - 1$, alors $x = u + 1$ et $2x - x^2 = 2u + 2 - u^2 - 2u - 1 = 1 - u^2$!! Donc

$$J_5 = \int_{-1}^0 \sqrt{1 - u^2} du = \frac{\pi}{4}$$

(c'est l'aire du quart de cercle : cf. cours pour le calcul détaillé !)

Enfin, pour calculer $\int_0^1 e^{\operatorname{Arcsin}(x)} dx$, c'est clairement le Arcsin qui nous embête, donc on le pose comme nouvelle variable :

Posons $u = \operatorname{Arcsin}(x)$. Alors quand $x = 0$, $u = 0$. Quand $x = 1$, $u = \operatorname{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2}$.

Ensuite, $e^{\operatorname{Arcsin}(x)} = e^u$.

Enfin, $x = \sin(u)$ donc $dx = \cos(u) du$. Donc

$$\begin{aligned} J_6 &= \int_0^1 e^{\operatorname{Arcsin}(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^u \cos(u) du = \Re \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{u+iu} du \right) = \Re \left(\left[\frac{e^{u+iu}}{1+i} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) \\ &= \Re \left(\frac{1-i}{2} \left(e^{\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi}{2}} - 1 \right) \right) \\ &= \Re \left(\frac{1-i}{2} \left(ie^{\frac{\pi}{2}} - 1 \right) \right) \end{aligned}$$

Finalement, $J_6 = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$.

Exercice 8. ●●○ Soit $f : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante. Montrer que $\int_a^b f(t) dt + \int_\alpha^\beta f^{-1}(t) dt = b\beta - a\alpha$.

Correction

Dans la seconde intégrale, posons $s = f^{-1}(t)$.

Alors quand $t = \alpha$, $s = a$ et quand $t = \beta$, $s = b$, $f^{-1}(t) = s$ et $t = f(s)$ donc $dt = f'(s)ds$, donc

$$\int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(t)dt = \int_a^b s f'(s)ds, \text{ donc}$$

$$\int_a^b f(t)dt + \int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(t)dt = \int_a^b f(t) + t f'(t)dt = [t f(t)]_a^b = b f(b) - a f(a) = a\alpha - b\beta.$$

3 Intégrales fonctions des bornes

Exercice 9. ●○○ Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, continue. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$.

Correction

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$. Alors

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} \\ &= F'(0) = f(0). \end{aligned}$$

Exercice 10. ●○○ Soit $\varphi : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$.

1. Montrer que φ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Correction

La fonction $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$ donc admet une primitive F sur $\mathbb{R}_+^*$ et une primitive G sur $\mathbb{R}_-^*$. Si $x > 0$, $\varphi(x) = F(2x) - F(x)$, fonction dérivable quel que soit $x > 0$. De même si $x < 0$, $\varphi(x) = G(2x) - G(x)$, dérivable en tout $x < 0$.

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x)$.

Correction

On va encadrer l'intégrale : reste à savoir s'il s'agit de e^t ou de $\frac{1}{t}$ que l'on va encadrer. Si $x > 0$, si $x \leq t \leq 2x$, alors $e^x \leq e^t \leq e^{2x}$, donc

$$e^x \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \leq \varphi(x) \leq e^{2x} \int_x^{2x} \frac{dt}{t},$$

i.e.

$$e^x (\ln(2x) - \ln(x)) \leq \varphi(x) \leq e^{2x} (\ln(2x) - \ln(x)).$$

Comme $\ln(2x) - \ln(x) = \ln(2)$, en faisant tendre x vers 0^+ on obtient $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \ln(2)$.

Si $x < 0$, alors $\varphi(x) = \int_{2x}^x \frac{e^t}{-t} dt$, et pour tout t dans $[2x, x]$, $\frac{e^{2x}}{-t} \leq \frac{e^t}{-t} \leq \frac{e^x}{-t}$, et les inégalités précédentes s'adaptent, donc $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} \ln(2)$.

3. Montrer que l'on peut prolonger φ par continuité en 0 et étudier la dérivabilité de ce prolongement.

Correction

La dérivée de φ est, pour tout x de $\mathbb{R}^*$,

$$\varphi'(x) = \frac{e^{2x}}{x} - \frac{e^x}{x}.$$

Or, $\frac{e^{2x}}{x} - \frac{e^x}{x} = \frac{1 + 2x - 1 - x + o(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$, donc, par le théorème de limite de la dérivée, φ est aussi dérivable en 0.

4. Démontrer que $\frac{\varphi(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Correction

On remarque, quand x tend vers $+\infty$, que $\frac{\varphi(x)}{x} \geq \frac{1}{x} \int_x^{2x} \frac{e^t}{2x} dt = \frac{e^x}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, donc φ admet une « branche parabolique d'axe (Oy) » en $+\infty$.

5. Déterminer la limite de φ en $-\infty$.

Correction

Soit $x < 0$. Alors $2x < x$ et pour tout t dans $[2x, x]$,

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{2x},$$

donc, par croissance de l'exponentielle,

$$\frac{e^{2x}}{x} \leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{e^x}{2x},$$

donc, en intégrant entre $2x$ et x .

$$\int_{2x}^x \frac{e^{2x}}{x} dt \leq \int_{2x}^x \frac{e^t}{t} dt \leq \int_{2x}^x \frac{e^x}{2x} dt,$$

i.e.

$$-e^{2x} \leq -\varphi(x) \leq -\frac{e^x}{2}$$

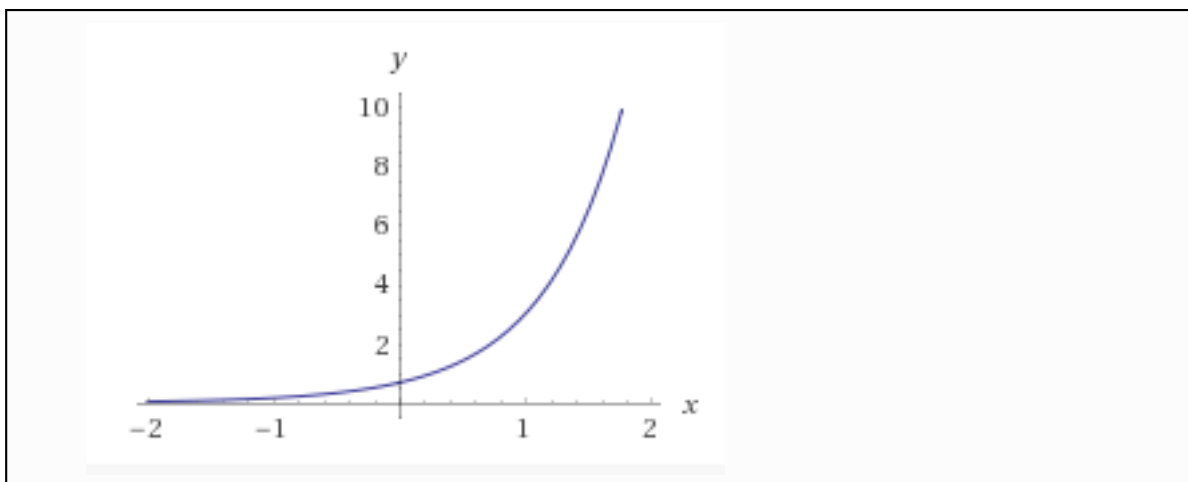
donc

$$\frac{e^x}{2} \leq \varphi(x) \leq e^{2x},$$

d'où, par encadrement, $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$.

6. Tracer la courbe $\mathcal{C}_\varphi$ de φ .

Correction



Exercice 11. ●●○ Soit $k \in]0, 1[$. On définit

$$F : x \mapsto \int_0^x \sqrt{1 - k \sin^2(t)} dt.$$

1. Déterminer le domaine D de définition de F et montrer que F est impaire.

Correction

La fonction $t \mapsto \sqrt{1 - k \sin^2(t)}$ est continue sur tout $\mathbb{R}$ car $k \in]0, 1[$. Donc F est définie sur tout $\mathbb{R}$. Ensuite, si $x \in \mathbb{R}$,

$$F(-x) = \int_0^{-x} \sqrt{1 - k \sin^2(t)} dt.$$

On fait le changement de variables $s = -t$. Alors $\sqrt{1 - k \sin^2(t)} = \sqrt{1 - k \sin^2(-s)} = \sqrt{1 - k \sin^2(s)}$ et $dt = -ds$, d'où

$$F(-x) = \int_0^x \sqrt{1 - k \sin^2(s)} (-ds) = -F(x).$$

Donc F est impaire.

On pose $a = F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

2. Calculer $F(\pi)$ en fonction de a .

Correction

On remarque que $F(\pi) = F(\pi/2) + \int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1 - k \sin^2(t)} dt = a + \int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1 - k \sin^2(t)} dt$. Pour calculer la seconde intégrale, posons $s = t - \pi$. Alors quand t vaut $\frac{\pi}{2}$, s vaut $-\frac{\pi}{2}$ et quand t vaut

π , s vaut 0. Ensuite, $\sin^2(t) = \sin^2(s - \pi) = \sin^2(s)$. Enfin, $dt = ds$. D'où

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1 - k \sin^2(t)} dt &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1 - k \sin^2(t)} dt \\ &= - \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k \sin^2(t)} dt \\ &= -F\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= F\left(\frac{\pi}{2}\right) = a. \end{aligned}$$

Donc $F(\pi) = 2a$.

3. Montrer que F est dérivable et strictement monotone sur D .

Correction

F est une primitive de $t \mapsto \sqrt{1 - k \sin^2(t)}$, continue sur $\mathbb{R}$, donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x réel, $F'(x) = \sqrt{1 - k \sin^2(x)}$. En particulier F' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. (i) Montrer que $\forall x \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, F(x + n\pi) = F(x) + 2na$.

Correction

Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} F(x + n\pi) &= \int_0^{x+n\pi} \sqrt{1 - k \sin^2(t)} dt \\ &= \int_0^{n\pi} \sqrt{1 - k \sin^2(t)} dt + \int_{n\pi}^{x+n\pi} \sqrt{1 - k \sin^2(t)} dt \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} \int_{p\pi}^{(p+1)\pi} \sqrt{1 - k \sin^2(t)} dt + \int_{n\pi}^{x+n\pi} \sqrt{1 - k \sin^2(t)} dt. \end{aligned}$$

Montrons que pour tout p , pour tout y , $\int_{p\pi}^{y+p\pi} \sqrt{1 - k \sin^2(t)} dt = \int_0^y \sqrt{1 - k \sin^2(t)} dt$.

Effectuons le changement de variables $s = t - p\pi$. Alors quand $t = p\pi$, $s = 0$ et quand $t = y + p\pi$, $s = y$. Ensuite $\sin^2(t) = \sin^2(s - p\pi) = \sin^2(s)$ et $ds = dt$. Donc

$$\int_{p\pi}^{y+p\pi} \sqrt{1 - k \sin^2(t)} dt = \int_0^y \sqrt{1 - k \sin^2(s)} ds,$$

le résultat est donc démontré, donc $\int_{p\pi}^{(p+1)\pi} \sqrt{1 - k \sin^2(t)} dt = \int_0^{\pi} \sqrt{1 - k \sin^2(t)} dt$ et

$$\int_{n\pi}^{x+n\pi} \sqrt{1 - k \sin^2(t)} dt = \int_0^x \sqrt{1 - k \sin^2(t)} dt, \text{ donc}$$

$$F(x + n\pi) = nF(\pi) + F(x) = F(x) + 2na.$$

(ii) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$.

Correction

F est strictement croissante, non bornée par la question précédente, donc elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Impaire, elle tend vers $-\infty$ en $-\infty$.

4 Intégrales et inégalités

Exercice 12. ●○○ Montrer $\frac{\ln 2}{\sqrt{3}} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\tan x}{x} \leq \sqrt{3} \ln 2$.

Exercice 13. ●●○ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\frac{1}{n+1} \leq \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^n dt \leq \frac{2}{n+1}$.

Exercice 14. ●●○

1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_a^b f(x) \sin(nx) dx$ et $\int_a^b f(x) \cos(nx) dx$ tendent vers 0 quand n tend $+\infty$.

Correction

Il s'agit, encore et toujours, du lemme de Riemann-Lebesgue. Regardons la première intégrale, en prenant $u(x) = f(x)$ et $v'(x) = \sin(nx)$, donc $u'(x) = f'(x)$ et $v(x) = -\frac{1}{n} \cos(nx)$, donc

$$\int_a^b f(x) \sin(nx) dx = \left[-\frac{1}{n} f(x) \cos(nx) \right]_a^b + \frac{1}{n} \int_a^b f'(x) \cos(nx) dx.$$

Or,

$$\left| \left[-\frac{1}{n} f(x) \cos(nx) \right]_a^b \right| \leq \frac{1}{n} (|f(a) \cos(na)| + |f(b) \cos(nb)|) \leq \frac{2 \|f\|_\infty}{n} \xrightarrow{+\infty} 0.$$

De même,

$$\left| \frac{1}{n} \int_a^b f'(x) \cos(nx) dx \right| \leq \frac{1}{n} \int_a^b |f'(x) \cos(nx)| dx \leq \frac{(b-a) \|f'\|_\infty}{n} \xrightarrow{+\infty} 0.$$

D'où le résultat.

2. Déterminer deux réels α et β tels que $\forall n \geq 1, \int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$.

Correction

Soient α et β deux réels, calculons par double intégration par parties, en prenant $u(t) = \alpha t + \beta t^2$

et $v'(t) = \cos(nt)$.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2) \cos(nt) dt &= \left[(\alpha t + \beta t^2) \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi (\alpha + 2\beta t) \frac{1}{n} \sin(nt) dt \\ &\quad (\text{posons } u(t) = \alpha + 2\beta t, \quad v'(t) = \sin(nt)) \\ &= \left[(\alpha t + \beta t^2) \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^\pi + \frac{1}{n^2} [(\alpha + 2\beta t) \cos(nt)]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{2\beta}{n^2} \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{n} [(\alpha t + \beta t^2) \sin(nt)]_0^\pi + \frac{1}{n^2} [(\alpha + 2\beta t) \cos(nt)]_0^\pi - \frac{1}{n^3} [2\beta \sin(nt)]_0^\pi \\ &= \frac{(\alpha + 2\beta\pi)(-1)^n - \alpha}{n^2} \end{aligned}$$

En prenant $\alpha = -1$ et $2\beta\pi = 1$, i.e. $\beta = \frac{1}{2\pi}$, on a le résultat désiré.

3. Retrouver ainsi la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Correction

Si $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2) \sum_{n=1}^N \cos(nt) dt.$$

Or,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \cos(nt) &= \Re \left(\sum_{n=1}^N e^{int} \right) \\ &= \Re \left(e^{it} \frac{1 - e^{iNt}}{1 - e^{it}} \right) \\ &= \Re \left(e^{it} \frac{e^{i\frac{N}{2}t} e^{-i\frac{N}{2}t} - e^{i\frac{N}{2}t}}{e^{i\frac{t}{2}} e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}} \right) \\ &= \Re \left(e^{i\frac{N+1}{2}t} \frac{\sin(\frac{N}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})} \right) \\ &= \frac{\cos(\frac{N+1}{2}t) \sin(\frac{N}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}. \end{aligned}$$

Or, $\cos(a) \sin(b) = \frac{1}{2} (\sin(b+a) + \sin(b-a))$, d'où

$$\sum_{n=1}^N \cos(nt) = \frac{1}{2} \frac{\sin(\frac{2N+1}{2}t) - \sin(\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} = \frac{\sin(\frac{2N+1}{2}t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{2},$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2) \left(\frac{\sin(\frac{2N+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})} - 1 \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2) \frac{\sin(\frac{2N+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})} dt - \frac{1}{2} \int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2) dt \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2) \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt \xrightarrow{+\infty} 0,$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2} \int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2) dt = -\frac{\alpha \pi^2}{4} - \beta \frac{\pi^3}{6} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{2\pi} \frac{\pi^3}{6} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 15. ●●○ Soit $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que si $\int_0^\pi f(t) \sin t dt = 0$, alors il existe $a \in]0, \pi[$ tel que f s'annule en a .

Correction

Supposons que f ne s'annule pas sur $[0, \pi]$. Alors f est de signe constant sur $[0, \pi]$, tout comme $\sin$. Donc $f(t) \sin(t)$ est de signe constant sur $[0, \pi]$, d'intégrale nulle, donc est nulle, absurde.

2. Montrer que si $\int_0^\pi f(t) \sin t dt = \int_0^\pi f(t) \cos t dt = 0$, alors f s'annule 2 fois sur $]0, \pi[$.

(indice : on pourra regarder $\int_0^\pi f(t) \sin(t-a) dt$).

Correction

Soit a un réel en lequel f s'annule (par la question précédente). Le problème est que $\cos$ change de signe ! Mais

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(t) \sin(t-a) dt &= \int_0^\pi f(t) \sin(t) \cos(a) dt + \int_0^\pi f(t) (-\sin(a)) \cos(t) dt \\ &= \cos(a) \int_0^\pi f(t) \sin(t) dt - \sin(a) \int_0^\pi \cos(t) f(t) dt = 0, \end{aligned}$$

donc $\int_0^\pi f(t) \sin(t-a) dt = 0$. Or si on suppose que f ne s'annule qu'une fois en a , alors f change nécessairement de signe (sinon elle serait nulle). Donc $f(t) \sin(t-a)$ est de signe constant, donc f est nulle, absurde.

Exercice 16. ●●● Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}_{\text{pm}}$. Montrer que

$$\sqrt{1 + \text{VM}_{[0,1]}(f)^2} \leq \int_{[0,1]} \sqrt{1 + f^2} \leq \sqrt{1 + \text{VM}_{[0,1]}(f^2)}$$

Correction

Pour l'inégalité de droite, on écrit par Cauchy-Schwarz

$$\int_0^1 \sqrt{1 + f(t)^2} dt \leq \sqrt{\int_0^1 (1 + f(t))^2 dt} = \sqrt{1 + \text{VM}(f^2)}.$$

Pour l'inégalité de gauche, on remarque que

$$\int_0^1 1 dt = \int_0^1 \sqrt{\sqrt{1 + f(t)^2} - f(t)} \cdot \sqrt{\sqrt{1 + f(t)^2} + f(t)} dt$$

Donc, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} 1 &\leq \left(\int_0^1 \sqrt{1+f(t)^2} - f(t) dt \right) \left(\int_0^2 \sqrt{1+f(t)^2} + f(t) dt \right) \\ &\leq \left(\int_0^1 \sqrt{1+f(t)^2} dt - \int_0^1 f(t) dt \right) \left(\int_0^2 \sqrt{1+f(t)^2} dt + \int_0^1 f(t) dt \right) \\ &\leq \left(\int_0^1 \sqrt{1+f(t)^2} dt \right)^2 - \left(\int_0^1 f(t) dt \right)^2, \end{aligned}$$

donc

$$1 + \text{VM}(f)^2 \leq \left(\int_0^1 \sqrt{1+f(t)^2} dt \right)^2,$$

d'où le résultat désiré !

Exercice 17. ●●○ Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$, concave.

1. Montrer que

$$(b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \int_a^b f(t) dt \leq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

2. Montrer que les inégalités persistent en supposant f seulement continue (on utilisera des sommes de Riemann).

Exercice 18. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 2\pi])$ une fonction convexe. Montrer que

$$\forall n > 0, \quad a_n = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \geq 0.$$

Exercice 19. Inégalité de Poincaré. ●●● Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ avec $f(0) = 0$. Montrer que

$$\int_0^1 f(t)^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_0^1 f'(t)^2 dt$$

Correction

On écrit l'expression de f en fonction de f' :

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x f'(t) dt.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient alors

$$f(x)^2 \leq \left(\int_0^x dt \right) \left(\int_0^x f'(t)^2 dt \right) \leq x \left(\int_0^1 f'(t)^2 dt \right),$$

d'où

$$\int_0^1 f(x)^2 dx \leq \int_0^1 x \left(\int_0^1 f'(t)^2 dt \right) dx \leq \frac{1}{2} \left(\int_0^1 f'(t)^2 dt \right).$$

Exercice 20. ●●● Si $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, si $p \in \mathbb{N}^*$, on définit la norme L^p de f comme

$$\|f\|_{L^p} = \sqrt[p]{\int_0^1 |f(t)|^p dt}.$$

1. Démontrer que $\|f\|_{L^p}$ est une norme sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.
2. Démontrer que $\|f\|_{L^p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \|f\|_{\infty, [0, 1]}$.

Correction

On peut supposer f positive sur $[0, 1]$, quitte à remplacer f par $|f|$. De même on peut supposer f non identiquement nulle (sinon le résultat est évident). De plus, si on pose $g = \frac{f}{\|f\|_{\infty}}$, alors

- $\|g\|_{\infty} = 1$ par homogénéité
- $\|g\|_{L^p} = \frac{\|f\|_{L^p}}{\|f\|_{\infty}}$ (la norme L^p est clairement homogène)

Il suffit donc de démontrer que $\sqrt[p]{\int_0^1 g(t)^p dt} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1$.

- déjà, par hypothèse, $\forall t \in [0, 1], g(t) \leq 1$ donc $\sqrt[p]{\int_0^1 g(t)^p dt} \leq 1$.
- ensuite, soit $\varepsilon > 0$. Soit x_0 dans $[0, 1]$ tel que $g(x_0) = 1$, soit $\eta > 0$ tel qu'il existe un intervalle de taille η , contenant x_0 , tel que $f(t) \geq 1 - \varepsilon$ sur cet intervalle (un tel η existe par continuité de g). Alors si $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 g(t)^p dt \geq \eta(1 - \varepsilon)^p,$$

donc

$$\sqrt[p]{\int_0^1 g(t)^p dt} \geq \sqrt[p]{\eta(1 - \varepsilon)^p}.$$

Comme $\sqrt[p]{\eta} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1$, on doit pouvoir conclure... Mais pour avoir vraiment une minoration en $1 - \varepsilon$, on va réécrire notre preuve, en changeant le $1 - \varepsilon$ en $\sqrt{1 - \varepsilon}$: Soit $\eta > 0$ tel qu'il existe un intervalle de taille η , contenant x_0 , tel que $f(t) \geq \sqrt{1 - \varepsilon}$ sur cet intervalle (un tel η existe par continuité de g). Alors si $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 g(t)^p dt \geq \eta(1 - \varepsilon)^{\frac{p}{2}},$$

donc

$$\sqrt[p]{\int_0^1 g(t)^p dt} \geq \sqrt[p]{\eta} \sqrt{1 - \varepsilon}.$$

Comme $\sqrt[p]{\eta} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1$, on dispose de $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq p_0$, $\sqrt[p]{\eta} \geq \sqrt{1 - \varepsilon}$. Si $p \geq p_0$, alors

$$\sqrt[p]{\int_0^1 g(t)^p dt} \geq 1 - \varepsilon,$$

d'où le résultat désiré !

5 Suites et intégrales (sommations de Riemann & Cie)

Exercice 21. ●●○ Soit, pour $n \geq 0$, $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)^n dx$.

1. Étudier la monotonie de (u_n) .

Correction

Soit n dans $\mathbb{N}$. On sait que pour tout x dans $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $0 \leq \tan(x) \leq 1$. Donc pour tout x dans $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\tan(x)^{n+1} \leq \tan(x)^n$. D'où, en intégrant, $u_{n+1} \leq u_n$. Donc (u_n) est décroissante.

2. En calculant $u_{n+2} + u_n$, déterminer la limite ℓ de u_n .

Correction

Déjà, décroissante et positive, u_n converge. Ensuite, si n est dans $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+2} + u_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)^n + 2dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)^n dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)^n (1 + \tan(x)^2) dx \\ &= \left[\frac{\tan^{n+1}(x)}{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Or, (u_{n+2}) et (u_n) convergent vers la même limite ℓ , donc $u_{n+2} + u_n \xrightarrow{+\infty} 2\ell$. Donc, comme $\frac{1}{n+1} \xrightarrow{+\infty} 0$, $\ell = 0$.

3. Donner un équivalent simple de $u_n - \ell$.

Correction

Par décroissance, on a pour tout n , $2u_{n+2} \leq u_{n+2} + u_n \leq 2u_n$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} \leq \frac{1}{2(n+1)} \leq u_n,$$

donc, pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{2(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$ (pour la deuxième inégalité, on a pris $n-2$ au lieu de n). Or, $\frac{1}{2(n+1)} \sim \frac{1}{2n}$ et $\frac{1}{2(n-1)} \sim \frac{1}{2n}$ donc, par encadrement, $u_n \sim \frac{1}{2n}$.

Exercice 22. ●●● Soit $f : [a, b+1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 1$ par

$$u_n = n \int_a^b \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right) dx.$$

Correction

Soit F une primitive de f . Alors $x \mapsto F\left(x + \frac{1}{n}\right)$ est une primitive de $x \mapsto f\left(x + \frac{1}{n}\right)$. Donc

$$\begin{aligned} n \int_a^b \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right) dx &= n \left[F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x) \right]_a^b \\ &= \frac{F\left(b + \frac{1}{n}\right) - F(b)}{\frac{1}{n}} - \frac{F\left(a + \frac{1}{n}\right) - F(a)}{\frac{1}{n}} \\ &\xrightarrow{+\infty} F'(b) - F'(a) = f(b) - f(a) \text{ car } F \text{ est dérivable.} \end{aligned}$$

Exercice 23. ●●○

1. Déterminer les limites suivantes (quand n tend vers $+\infty$)

- (a) $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right),$ (b) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}},$
 (c) $\frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (n+k)},$ (d) $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k},$
 (e) $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (\ln k^k - \ln n^k),$ (f) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right).$

Correction

(a) Ici, on a presque directement une somme de Riemann :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right),$$

où $f : t \mapsto t^2 \sin(\pi t)$. Donc, par le théorème de convergence des sommes de Riemann,

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt.$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t) dt &= \int_0^1 t^2 \sin(\pi t) dt \\ &\stackrel{\substack{u(t)=t^2, u'(t)=2t \\ v'(t)=\sin(\pi t), v(t)=-\frac{1}{\pi} \cos(\pi t)}}{=} \left[-\frac{t^2}{\pi} \cos(\pi t) \right]_0^1 + \frac{2}{\pi} \int_0^1 t \cos(\pi t) dt \\ &\stackrel{\substack{u(t)=t, u'(t)=1 \\ v'(t)=\cos(\pi t), v(t)=\frac{1}{\pi} \sin(\pi t)}}{=} \pi + \left[2 \frac{t}{\pi^2} \sin(\pi t) \right] - \frac{2}{\pi^2} \int_0^1 \sin(\pi t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3}. \end{aligned}$$

(b) Là, il faut un peu plus forcer le destin pour faire apparaître la somme de Riemann :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}},$$

qui converge vers

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{2}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{2} \left[2\text{Arcsin}\left(\frac{t}{2}\right) \right]_0^1 \\ &= \text{Arcsin}\frac{1}{2} - \text{Arcsin}(0) = \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

(c) Ici, c'est a priori un peu plus dur de faire apparaître une somme de Riemann, mais on a déjà vu ce genre de méthode dans l'exercice corrigé en cours ! Déjà, on écrit que

$$\frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (n+k)} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^n} \prod_{k=1}^n (n+k)} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)}.$$

Or,

$$\begin{aligned}\ln \left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)} \right) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(1+t) dt \\ &= [(1+t) \ln(1+t) - (1+t)]_0^1 = 2 \ln(2) - 1.\end{aligned}$$

2. Soit $p > 0$. Déterminer un équivalent, quand n tend vers $+\infty$, de $\sum_{k=1}^n k^p$.

Correction

Là, la somme de Riemann n'est pas évidente à trouver. Mais on peut s'en sortir en la faisant apparaître artificiellement ! On écrit que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k^p &= n^p \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p \\ &= n^{p+1} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right),\end{aligned}$$

où $f : t \mapsto t^p$. Par le théorème de convergence des sommes de Riemann,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 t^p dt = \frac{1}{p+1}.$$

Donc, finalement,

$$\sum_{k=1}^n k^p \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}.$$

Exercice 24. ●●○ Montrer que $\frac{e}{4n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

6 Formules de Taylor

Exercice 25. ●●○

1. Montrer que pour tout x dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Correction

Soit $f : x \mapsto \sin(x)$. Par la formule de Taylor avec reste intégrale,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{f^{(4)}(t)(x-t)^3}{3!} dt = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{\sin(t)(x-t)^3}{3!} dt.$$

Le reste intégral est positif car $\sin$ est positif sur $[0, \pi/2]$. D'où l'inégalité de gauche. De même,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \int_0^x \frac{f^{(6)}(t)(x-t)^5}{5!} dt = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \int_0^x \frac{-\sin(t)(x-t)^5}{5!} dt,$$

d'où l'inégalité de droite.

2. Démontrer que $\forall x \in [0, 1], x^2 - \frac{1}{3}x^4 \leq \sin^2 x \leq x^2$.
3. En déduire la limite de la suite $\left(\sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 26. ●●○ Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, telle que $|f|$ est bornée par un réel M_0 et $|f''|$ est bornée par un réel M_2 . Démontrer que $|f'|$ est bornée par $\sqrt{2M_0M_2}$ (**attention !** ça n'est pas tout à fait l'exercice corrigé en cours !)

Correction

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $h > 0$. Par les inégalités de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$,

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{M_2 h^2}{2},$$

i.e.

$$-\frac{M_2 h^2}{2} \leq f(x+h) - f(x) - hf'(x) \leq \frac{M_2 h^2}{2}$$

et, par les inégalités de Taylor-Lagrange entre x et $x-h$,

$$\frac{M_2 h^2}{2} \leq f(x+h) - f(x) + hf'(x) \leq \frac{M_2 h^2}{2}$$

On réécrit la première inégalité

$$-\frac{M_2 h^2}{2} \leq -f(x+h) + f(x) + hf'(x) \leq \frac{M_2 h^2}{2}$$

donc, en sommant les deux inégalités,

$$-M_2 h^2 \leq f(x+h) - f(x-h) + 2hf'(x) \leq M_2 h^2,$$

i.e.

$$-M_2 h^2 - 2M_0 \leq 2hf'(x) \leq M_2 h^2 + 2M_0,$$

donc

$$|f'(x)| \leq \frac{M_2 h}{2} + \frac{M_0}{h}.$$

On étudie la fonction de droite, de dérivée $\frac{M_2}{2} - \frac{M_0}{h^2}$, dérivée qui s'annule en $h = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$, négative avant, positive après. Donc la fonction de droite admet un minimum égal à

$$\frac{M_2}{2} \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}} + \frac{M_0}{\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}} = \sqrt{2M_0M_2},$$

d'où le résultat.

Exercice 27. ●●● Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré impair tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|.$$

1. Montrer que f est la fonction nulle.
2. Le résultat reste-t-il vrai si $\deg(P)$ est pair ?

Indications

- 1
 1. Utiliser la linéarité.
 2. Raisonner par l'absurde et construire un bon polynôme.
- 2
 1. Utiliser le TVI avec f et $VM_{[a,b]}(f)$
 2. Poser $g : t \mapsto f(t) - t$ et calculer l'intégrale de g sur $[0, 1]$.
 3. Utiliser le TVI avec f pour la valeur $\frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)}$.
- 3
 1. Pour (v_n) , prendre un $\varepsilon > 0$, écrire que $\int_0^1 = \int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1-\varepsilon}^1$.
 2. Faire une IPP !
- 4
 1. Utiliser convenablement l'inégalité triangulaire.
 2. Prendre h qui minimise le majorant trouvé.
- 5 Dans cet exercice, sortir un $\frac{1}{n}$ et faire apparaître une somme de Riemann. S'il y a un produit, en prendre le ln.
- 6
 1. Intégration directe.
 2. Linéariser le cosinus.
 3. Utiliser que $\tan = \sin / \cos$ et reconnaître (presque) u'/u .
 4. Ou bien faire un changement de variables $u = e^x$, ou reconnaître une intégration directe (coup du e^x en haut).
- 7
 - (i) Effectuer une décomposition en éléments simples.
 - (ii) Faire apparaître $u^n u'$ avec $u = \tan$!
 - (iii) Faire une IPP, en posant $u'(x) = x^{\frac{3}{2}}$, et $v(x) = \ln(x)$.
 - (iv) Poser, comme indiqué, $t = \text{Arcsin}(\sqrt{x})$.
 - (v) Poser $u = x - 1$.
 - (vi) Poser $u = \text{Arcsin}(x)$.
- 8 Utiliser un bon changement de variables.
- 9 Utiliser la définition d'une dérivée avec le taux d'accroissement.
- 10
 1. Utiliser des primitives.

2. Encadrer l'intégrale : encadrer l'un des deux termes parmi e^t ou $\frac{1}{t}$, et intégrer ce qui reste.
3. Utiliser le théorème de la limite de la dérivée.
4. Minorer e^t par e^x .
- 5.
11.
 1. Faire un changement de variables.
 2. Séparer l'intégrale en deux et poser $s = t - \pi$.
 3. Utiliser la définition d'une primitive.
 4. (i) Écrire $\int_0^{x+n\pi} = \int_0^{n\pi} + \int_{n\pi}^{x+n\pi}$
 (ii) Utiliser le théorème de la limite monotone.
12. Utiliser juste la formule de Taylor...
13. Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1+t^2}{2}$ et chercher à l'encadrer entre deux bonnes fonctions affines.
14.
 1. Faire une intégration par parties, et majorer proprement chaque terme.
 2. On doit trouver $\alpha = -1$ et $\beta = \frac{1}{2\pi}$.
 3. Utiliser que $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2) \sum_{n=1}^N \cos(nt) dt$, recalculer la somme des $\cos(nt)$. Penser aussi au fait que $\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\sin(b+a) + \sin(b-a))$.
15.
 1. Supposer que f ne s'annule pas et aboutir à une contradiction.
 2. Utiliser que f s'annule en un réel a et considérer $\int_0^\pi f(t) \sin(t-a) dt$.
16. L'inégalité de droite est évidente. Pour l'inégalité de gauche, penser à considérer les quantités $\sqrt{1+f^2} - f$ et $\sqrt{1+f^2} + f$.
17. Pour la première question, utiliser le fait que la courbe de f est au-dessus d'une certaine corde et sous une certaine tangente.
18. Faire des IPP, puis un changement de variables $u = nt$, puis découper l'intégrale.
19. Écrire l'expression de $f(x)$ en fonction de f' et appliquer directement l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
20.
 - déjà commencer par montrer que l'on peut se ramener à f positive, non identiquement nulle, de maximum égal à 1.
 - ensuite, montrer que dans le cas ci-dessus, $\sqrt[p]{\int_0^1 f(t)^p dt} \leq 1$ et que pour tout ε , $\sqrt[p]{\int_0^1 g(t)^p dt} \geq 1 - \varepsilon$ à pcr.
21.
 1. Utiliser le fait que $|\tan(t)| < 1$.
 2. Penser à **d'abord** démontrer que (u_n) converge.
 3. Utiliser la décroissance de u_n et le calcul de $u_n + u_{n+2}$.
22. Utiliser une primitive de f et faire apparaître un taux de variation.
23.
 1. Utiliser les techniques vues en cours : sortir un $\frac{1}{n}$, prendre le $\ln$ pour la troisième limite.
 2. Multiplier et diviser par $n^p \times n$, et faire apparaître une somme de Riemann.
25. Utiliser la formule de Taylor avec reste intégrale !
26. Ici, ne pas utiliser une mais **deux** inégalités de Taylor-Lagrange : entre x et $x+h$, **puis** entre $x-h$ et x .