

## Espaces vectoriels et applications linéaires

### A - Espaces vectoriels

Révisions

### B - Espaces de dimension finie

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
<b>a) Existence de bases</b>	
<p>Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.</p> <p>Si <math>(x_i)_{1 \leq i \leq n}</math> engendre <math>E</math> et si <math>(x_i)_{i \in I}</math> est libre pour une certaine partie <math>I</math> de <math>\{1, \dots, n\}</math>, alors il existe une partie <math>J</math> de <math>\{1, \dots, n\}</math> contenant <math>I</math> pour laquelle <math>(x_j)_{j \in J}</math> est une base de <math>E</math>.</p>	<p>Existence de bases en dimension finie.</p> <p>Théorèmes de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).</p>
<b>b) Dimension d'un espace de dimension finie</b>	
<p>Dans un espace engendré par <math>n</math> vecteurs, toute famille de <math>n + 1</math> vecteurs est liée.</p> <p>Dimension d'un espace de dimension finie.</p>	<p>Dimension de <math>\mathbb{K}^n</math>, de <math>\mathbb{K}_n[X]</math>, de <math>\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})</math>.</p> <p>Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.</p>
<p>Dans un espace de dimension <math>n</math>, caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de <math>n</math> vecteurs.</p> <p>Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimension finie.</p> <p>Rang d'une famille finie de vecteurs.</p>	<p>Notation <math>\text{rg}(x_1, \dots, x_n)</math>.</p>
<b>c) Sous-espaces et dimension</b>	
<p>Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.</p> <p>Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann.</p> <p>Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires.</p> <p>Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.</p>	

## C - Applications linéaires

Révisions + ces points de nouveauté.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

### a) Généralités

Application linéaire de rang fini.

Notation  $\text{rg}(u)$ .

Le rang de  $v \circ u$  est majoré par  $\min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$ . Invariance du rang par composition par un isomorphisme.

### d) Théorème du rang

Forme géométrique du théorème du rang : si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et si  $S$  est un supplémentaire de  $\text{Ker } u$  dans  $E$ , alors  $u$  induit un isomorphisme de  $S$  sur  $\text{Im } u$ .

Théorème du rang : si  $E$  est de dimension finie  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors  $n = \dim \text{Ker } u + \text{rg}(u)$ .

### e) Formes linéaires et hyperplans en dimension finie

Forme linéaire.

Formes coordonnées relativement à une base.

Hyperplan, défini comme noyau d'une forme linéaire non nulle.

Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.

Si  $H$  est un hyperplan de  $E$  et  $D$  une droite non contenue dans  $H$ , alors  $E = H \oplus D$ .

Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan.

En dimension  $n$ , les hyperplans sont exactement les sous-espaces de dimension  $n - 1$ .

Comparaison de deux équations d'un même hyperplan.

Si  $E$  est un espace de dimension finie  $n$ , l'intersection de  $m$  hyperplans est de dimension au moins  $n - m$ . Réciproquement, tout sous-espace de  $E$  de dimension  $n - m$  est l'intersection de  $m$  hyperplans.

Système d'équations d'un sous-espace vectoriel ; cas des droites vectorielles de  $\mathbb{R}^2$ , des droites et plans vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ .

L'étude de la dualité est hors programme.

**Organisation de la colle.** Cours et exercices sur la dimension finie.

#### Exemples de questions de cours

1. Si  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ , toute famille de  $n + 1$  vecteurs de  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$  est liée.
2. Si  $\mathcal{L}$  est libre,  $\mathcal{G}$  est génératrice finie, si  $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ , alors il existe une base de  $E$  telle que  $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$ .
3. Si  $E$  est de dimension finie,  $E$  admet une base et toutes ses bases ont même cardinal.
4. Dimension d'un produit.
5. Deux  $\mathbb{K}$ -evdf sont isomorphes ssi ils sont de même dimension.
6. Si  $E$  est de dimension finie et  $F$  est un sev de  $E$ ,  $F$  est de dimension finie et  $\dim(F) \leq \dim(E)$ .
7. Dimension d'un supplémentaire + Existence d'un supplémentaire en dimension finie.
8. Formule de Grassmann. Conséquence (sur une condition allégée de caractère direct d'une somme).
9. Dimension de  $\mathcal{L}(E, F)$ .
10. Théorème du rang. Conséquence (entre deux  $\mathbb{K}$ -evdf de même dimension, une application linéaire est injective ssi elle est surjective ssi elle est bijective).
11. Rang d'un produit.
12.  $H$  est un hyperplan ssi il est de dimension  $n - 1$ .
13. En dimension finie, si  $H$  est un hyperplan et  $F$  un sev,  $H \cap F$  est de dimension  $\dim(F)$  ou  $\dim(F) - 1$ . Application à l'intersection de  $p$  hyperplans.