

DM 15 pour le lundi 22 mars

- Formule « bases » : le problème (durée : 2h)
- Formule « avancée » : le problème + les deux exercices (le second a besoin d'initiative et de travail en groupe – c'est bien un exercice d'intégration !)

Problème 1. Dérivation sous le signe intégrale et application

A. Le théorème

Soient $a < b$ deux réels, $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout t dans $[a, b]$, $\alpha(t) \geq 0$, et F la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) = \int_a^b \beta(t)e^{-x\alpha(t)} dt.$$

Le but de cette partie est de démontrer que F est dérivable et de déterminer une expression de sa dérivée.

1. Démontrer qu'il existe une constante positive K telle que pour tout t dans $[a, b]$, pour tous x et x_0 dans \mathbb{R}_+ , on a

$$\left| \beta(t)e^{-x\alpha(t)} - \beta(t)e^{-x_0\alpha(t)} + (x - x_0)\beta(t)\alpha(t)e^{-x_0\alpha(t)} \right| \leq \frac{1}{2}K(x - x_0)^2.$$

Correction

Déjà, $t \mapsto |\alpha(t)|$ et $t \mapsto |\beta(t)|$ sont continues sur le segment $[a, b]$, donc atteignent leurs maximums respectifs M_1 et M_2 .

Notons $f : x \mapsto \beta(t)e^{-x\alpha(t)}$. Alors comme pour tout x positif, $f'(x) = -\alpha(t)\beta(t)e^{-x\alpha(t)}$ et $f''(x) = \alpha^2(t)\beta(t)e^{-x\alpha(t)}$, on en déduit, comme $\Re(\alpha(t)) \geq 0$ et $x \geq 0$,

$$|f''(x)| \leq |\alpha(t)|^2|\beta(t)| \leq M_1M_2^2.$$

D'où, par l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\left| \beta(t)e^{-x\alpha(t)} - \beta(t)e^{-x_0\alpha(t)} + (x - x_0)\beta(t)\alpha(t)e^{-x_0\alpha(t)} \right| \leq \frac{1}{2}M_1M_2^2(x - x_0)^2.$$

2. En déduire que pour tout x et x_0 dans \mathbb{R}_+ , on a

$$\left| \int_a^b \beta(t)e^{-x\alpha(t)} dt - \int_a^b \beta(t)e^{-x_0\alpha(t)} dt + (x - x_0) \int_a^b \beta(t)\alpha(t)e^{-x_0\alpha(t)} dt \right| \leq \frac{b-a}{2}K(x - x_0)^2.$$

Correction

Attention à ne pas intégrer trop brutalement ! On écrit que

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_a^b \beta(t)e^{-x\alpha(t)} dt - \int_a^b \beta(t)e^{-x_0\alpha(t)} dt + (x - x_0) \int_a^b \beta(t)\alpha(t)e^{-x_0\alpha(t)} dt \right| \\
 &= \left| \int_a^b \left(\beta(t)e^{-x\alpha(t)} - \beta(t)e^{-x_0\alpha(t)} + (x - x_0)\beta(t)\alpha(t)e^{-x_0\alpha(t)} \right) dt \right| \\
 &\leq \int_a^b \left| \beta(t)e^{-x\alpha(t)} - \beta(t)e^{-x_0\alpha(t)} + (x - x_0)\beta(t)\alpha(t)e^{-x_0\alpha(t)} \right| dt \\
 &\leq \int_a^b \frac{b-a}{2} M_1 M_2^2 (x - x_0)^2 dt \text{ par la question précédente.} \\
 &\leq \frac{(b-a)^2}{2} M_1 M_2^2 (x - x_0)^2.
 \end{aligned}$$

3. Dédire de la question précédente que F est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et que

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^*, F'(x_0) = - \int_a^b \beta(t)\alpha(t)e^{-x_0\alpha(t)} dt.$$

Justifier que l'on a aussi la dérivabilité de F à droite en 0.

Correction

Soient x et x_0 dans \mathbb{R}_+^* , distincts. Notons $G : x \mapsto - \int_a^b \beta(t)\alpha(t)e^{-x\alpha(t)} dt$. La question précédente peut se réécrire sous la forme

$$|F(x) - F(x_0) - (x - x_0)G(x_0)| \leq \frac{(b-a)^2}{2} M_1 M_2^2 (x - x_0)^2,$$

soit, en divisant par $|x - x_0| \neq 0$,

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - G(x_0) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} M_1 M_2^2 |x - x_0| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0,$$

donc $\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} G(x_0)$, ce qui signifie que F est dérivable en x_0 et que

$$F'(x_0) = G(x_0).$$

B. Une application

Pour tout x dans \mathbb{R} , on pose

- $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt,$
- $G(x) = F(x^2) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt,$
- $H(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$

4. Justifier que G et H sont définies, dérivables sur \mathbb{R} , et démontrer que pour tout x dans \mathbb{R} , $G'(x) = -2H'(x)H(x)$.

Correction

Soit x dans \mathbb{R} . Alors

$$\begin{aligned} G'(x) &= -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt \\ &= -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt \\ &= -2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-(xt)^2} x dt. \end{aligned}$$

On effectue le changement de variables $u = xt$. Quand $t = 0$, $u = 0$, quand $t = 1$, $u = x$. $e^{-(xt)^2} = e^{-u^2}$, et $du = x dt$. Donc

$$G'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du = -2H'(x)H(x).$$

5. En déduire que pour tout x dans \mathbb{R} , $G(x) = -H(x)^2 + \frac{\pi}{4}$.

Correction

Comme $x \mapsto 2H'(x)H(x)$ est la dérivée de $x \mapsto H(x)^2$, on en déduit qu'il existe une constante K telle que pour tout x dans \mathbb{R} ,

$$G(x) = -H(x)^2 + K.$$

En évaluant en 0, il vient $G(0) = -H(0)^2 + K$, i.e., comme $G(0) = F(0) = \frac{\pi}{4}$ et $H(0) = 0$, $K = \frac{\pi}{4}$. Donc

$$G(x) = -H(x)^2 + \frac{\pi}{4}.$$

6. Démontrer que pour tout x dans \mathbb{R}_+ , $|G(x)| \leq e^{-x^2}$, et en déduire la limite de G en $+\infty$, puis la valeur de

$$\int_0^x e^{-t^2} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

C'est ce qu'on appelle l'intégrale de Gauss !

Correction

Soit x dans \mathbb{R}_+ . Alors, comme l'intégrande de G est positif,

$$|G(x)| = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

Or, pour tout $t \in [0, 1]$, $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$, et $x^2(1+t^2) \geq x^2$, i.e. $e^{-x^2(1+t^2)} \leq e^{-x^2}$, donc

$$|G(x)| \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt = e^{-x^2}.$$

On en déduit, par encadrement, que $G(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. On en déduit alors que $-H(x)^2 + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$,

i.e. $H(x)^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}$, i.e., comme H est positive pour tout x positif, $H(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, c'est-à-dire

que

$$\int_0^x e^{-t^2} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Problème 2. Divers exercices

Exercice 1. 1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_x^y e^{t^2} dt = 1.$$

2. On note $\varphi(x)$ le réel obtenu à la question précédente. Montrer que φ est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ .

Exercice 2. On note, pour n dans \mathbb{N} ,

$$A_n = \{(x, y) \in [0, n]^2, x^2 + y^2 \leq n^2\}.$$

Déterminer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $\frac{A_n}{n^2}$. Commenter.