

## DM 16

### Pour le lundi 30 mars

#### Formules

1. **Formule 1. Bases.** Parties A.I, A.II et B.I. Temps conseillé 3h.
2. **Formule 2.** Parties A et B. Temps conseillé 4h.
3. **Formule 3.** La totale!

### Problème 1. Sous-espaces stables par un endomorphisme

Ce problème s'intéresse à la notion de sous-espace stable par un endomorphisme.  
Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .  
On dit que  $F$  est stable par  $u$  si  $u(F) \subset F$ , c'est-à-dire que pour tout  $x$  dans  $F$ ,  $u(x)$  est dans  $F$ .  
On rappelle que l'on note  $u^k = \underbrace{u \circ \dots \circ u}_{k \text{ fois}}$ , avec comme convention  $u^0 = \text{Id}_E$ .

#### A. Généralités

##### A-I. Un exemple

On considère l'endomorphisme  $u$  de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à la matrice  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ .

On note  $D = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  et  $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0 \right\}$ .

1. Vérifier que  $D$  et  $P$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ , et qu'ils sont stables par  $u$ .
2. Démontrer que  $P \oplus D = \mathbb{R}^3$ .
3. En considérant un sous-espace vectoriel de  $P$ , répondre à la question suivante : « si  $F$  est un sous-espace vectoriel stable par  $u$ , tout sous-espace vectoriel de  $F$  est-il aussi stable par  $u$  ? »

##### A-II. Généralités théoriques

4. Démontrer que si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$  stables par  $u \in \mathcal{L}(E)$ , alors  $F + G$  et  $F \cap G$  sont stables par  $u$ .
5. Démontrer que si  $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$  et  $u \circ v = v \circ u$ , alors  $\ker(u)$  et  $\text{Im}(u)$  sont stables par  $v$ . Dans le cas où  $u$  est un projecteur, démontrer qu'il s'agit d'une équivalence.
6. Soit  $p$  un projecteur. Démontrer que si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ ,  $F$  est stable par  $p$  si et seulement s'il existe  $A$  un sous-espace vectoriel de  $\ker(p)$  et  $B$  un sous-espace vectoriel de  $\text{Im}(p)$  tels que  $F = A \oplus B$ .  
*Pour le sens direct, on pourra essayer de démontrer que  $F = (F \cap \ker(p)) \oplus (F \cap \text{Im}(p))$ .*

##### A-III. Existence d'une droite stable dans le cas complexe

Ici,  $E$  est de **dimension finie**. On va démontrer ici un joli résultat, **très utile pour la suite** : si  $u$  est un endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, il existe une droite vectorielle stable par  $u$ .

Si  $P \in \mathbb{C}[X]$ ,  $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ , on note  $P(u) = \sum_{k=0}^d a_k u^k = a_0 \text{Id}_E + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n$ .

On admet que si  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes,  $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$ . Ainsi, si  $P = X - 2$  et  $Q = X^2 + 3X + 3$ ,  
 $(PQ)(u) = (u - \underbrace{2\text{Id}_E}_{\text{attention!}}) \circ (u^2 + 2u + 3\text{Id}_E)$ .

7. Démontrer qu'il existe un polynôme  $P$  non constant tel que  $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

On considère alors  $Q$  un polynôme tel que  $Q(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ , de degré minimal.

8. Justifier brièvement qu'un tel  $Q$  existe et que  $Q$  possède au moins une racine  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

9. Démontrer que  $u - \lambda \text{Id}_E$  n'est pas inversible. En déduire qu'il existe  $x$  dans  $E \setminus \{0_E\}$  tel que  $u(x) = \lambda x$  et qu'il existe une droite  $D$  stable par  $u$ .

## B. Endomorphismes cycliques et semi-simples

Dans cette partie, on suppose que  $E$  est un espace vectoriel de **dimension finie**, notons-la  $n$ , et  $u$  est un endomorphisme de  $E$ . On dit que  $u$  est **cyclique** s'il existe  $x$  dans  $E$  tel que  $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$  est une base de  $E$ .

### B-I. Endomorphismes nilpotents

Soit  $u$  un endomorphisme **nilpotent**, c'est-à-dire qu'il existe  $k$  dans  $\mathbb{N}$  tel que  $u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

10. Démontrer qu'il existe  $p$  dans  $\mathbb{N}^*$  tel que  $u^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$  et  $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

11. Justifier qu'il existe un vecteur  $x$  tel que  $u^{p-1}(x) \neq 0$ , et démontrer que  $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$  est libre dans  $E$ . En déduire que  $p \leq n$ .

On suppose que  $u$  est nilpotent d'indice maximal, c'est-à-dire que  $p = n$ .

12. Justifier qu'alors  $u$  est cyclique.

13. Vérifier que la dérivation  $D : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}_n[X] \\ P \mapsto P' \end{cases}$  est nilpotente d'indice maximal.

On cherche alors les sous-espaces stables par un endomorphisme nilpotent d'indice maximal.

14. Démontrer que pour tout  $k$  dans  $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\ker(u^k)$  est stable par  $u$  et  $\dim(\ker(u^k)) = k$ .

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel stable par  $u$ , de dimension  $q$ .

15. Démontrer que :  $\forall x \in F, u^q(x) = 0$ . En déduire que  $F = \ker(u^q)$ .

On pourra considérer  $v : \begin{cases} F \rightarrow F \\ x \mapsto u(x) \end{cases}$ .

16. Ainsi, quels sont les sous-espaces de  $\mathbb{K}_n[X]$  stables par l'endomorphisme de dérivation ?

### B-II. Endomorphismes simples

Soit  $u$  un endomorphisme **simple**, i.e. dont les seuls sous-espaces stables par  $u$  sont  $\{0_E\}$  et  $E$ . Soit  $x \in E \setminus \{0_E\}$ . Notons  $p = \max\{k \in \mathbb{N}^*, (x, u(x), \dots, u^{k-1}(x)) \text{ est libre}\}$ . ( $p$  existe, on a déjà fait 2 fois cette question durant ce DS!)

17. Démontrer que  $\text{Vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$  est stable par  $u$ . Conclure que  $u$  est cyclique.

18. Quels sont les endomorphismes simples d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie ?

### B-III. Endomorphismes semi-simples

Dans cette partie, le corps de base est  $\mathbb{C}$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , **semi-simple**, c'est-à-dire que tout sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  stable par  $u$  admet un supplémentaire, lui-aussi stable par  $u$ .

19. Vérifier qu'un projecteur est semi-simple.

20. Démontrer qu'il existe  $x \in E \setminus \{0_E\}$ ,  $H$  un hyperplan tels que  $\text{Vect}(x) \oplus H = E$  et tels que  $\text{Vect}(x)$  et  $H$  soient stables par  $u$ . On pourra utiliser la partie A-III.

21. Démontrer que l'application  $v : \left. \begin{array}{l} H \rightarrow H \\ x \mapsto u(x) \end{array} \right\}$  est semi-simple. Il pourra être utile de démontrer que si  $A, B, C$  sont trois s.e.v. de  $E$  tels que  $A \subset B$  et  $A \oplus C = E$ , alors  $A \oplus (B \cap C) = B$ .
22. En déduire qu'il existe une base  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  de  $E$  et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$  tels que pour tout  $i$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $u(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$ .

### C. Endomorphismes de permutation

Dans cette section, on suppose que  $E = \mathbb{R}^n$ . On fixe, jusqu'à la fin du problème,  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $E$ . Si  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ , on définit l'endomorphisme  $f_\sigma$  par  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ . Par exemple, si  $n = 4$  et  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , alors

$$f_\sigma \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right) = f_\sigma(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4) = x_1 e_4 + x_2 e_3 + x_3 e_1 + x_4 e_2 = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

23. **Un exemple.** Dans cette question,  $E = \mathbb{R}^4$ , et  $\sigma$  est le cycle  $(1 \ 3 \ 4)$ . Représenter la matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  telle que  $f_\sigma$  soit associée à la matrice  $A$ .
24. Vérifier que pour tout  $\sigma$  dans  $\mathcal{S}_n$ ,  $f_\sigma \in GL(E)$  et que  $\Phi : \left. \begin{array}{l} \mathcal{S}_n \rightarrow GL(E) \\ \sigma \mapsto f_\sigma \end{array} \right\}$  est un morphisme de groupes.
25. Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $i \neq j$  et  $\tau = (i \ j)$  la transposition (qui échange  $i$  et  $j$  et fixe tous les autres points). Démontrer que  $f_\tau$  est une symétrie parallèlement à  $\text{Vect}(e_i - e_j)$ , par rapport à un sous-espace à préciser.

Soit  $D = \text{Vect}(\varepsilon)$ , où  $\varepsilon = \sum_{i=1}^n e_i$  et soit  $H$  l'hyperplan vectoriel  $H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E, x_1 + \dots + x_n = 0 \right\}$

Un sous-espace vectoriel de  $F$  de  $E$  est dit  $\mathcal{S}_n$ -stable lorsque, pour tout  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ ,  $f_\sigma(F) \subset F$ .

26. Préciser la dimension de  $H$  et en donner une base.
27. Démontrer que  $D$  et  $H$  sont  $\mathcal{S}_n$ -stables et que  $E = D \oplus H$ .

On cherche désormais à déterminer tous les sous-espaces  $\mathcal{S}_n$ -stables. Soit  $F$  un tel sous-espace, non réduit à  $\{0_E\}$ .

28. Si pour tout  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F$ , on a  $x_1 = \dots = x_n$ , conclure à la nature de  $F$ .

On suppose donc qu'il existe  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F$  et  $i \neq j$  tels que  $x_i \neq x_j$ .

29. En considérant la transposition  $\tau = (i \ j)$ , démontrer que  $e_i - e_j \in \text{Vect}(f_\sigma(x))_{\sigma \in \mathcal{S}_n}$ , et que  $e_i - e_j \in F$ .
30. En déduire, en considérant d'autres transpositions bien choisies, que pour tout  $k$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $e_1 - e_k \in F$ .
31. Déterminer les sous-espaces vectoriels  $\mathcal{S}_n$ -stables de  $E$ .