DM 16
Pour le lundi 30 mars

Formules

1. **Formule 1. Bases.** Parties A.I, A.II et B.I. Temps conseillé 3h.
2. **Formule 2.** Parties A et B. Temps conseillé 4h.
3. **Formule 3.** La totale !

Problème 1. Sous-espaces stables par un endomorphisme

Ce problème s'intéresse à la notion de sous-espace stable par un endomorphisme.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathscr{L}(E)$. Si F est un sous-espace vectoriel de E.
On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$, c'est-à-dire que pour tout x dans F, $u(x)$ est dans F.
On rappelle que l'on note $u^k = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$, avec comme convention $u^0 = \mathrm{Id}_E$.

A. Généralités

A-I. Un exemple

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

On note $D = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $P = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z=0\right\}$.

1. Vérifier que D et P sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, et qu'ils sont stables par u.

Correction

Ici, les vérifications se doivent d'être rapides !

- D est un sous-espace vectoriel car c'est le sous-espace vectoriel engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
- P est un sous-espace vectoriel, car c'est le noyau de $\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x+y+z$, qui est une forme linéaire.

Ensuite, si $a \in D$, $a = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$u(a) = \lambda \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \in D,$$

donc D est stable par u.

Enfin, si $b = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P$, alors

$$u(b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + 2z \\ 2x + 2y - z \\ -z + 2y + 2z \end{pmatrix},$$

et $(2x - y + 2z) + (2x + 2y - z) + (-z + 2y + 2z) = 3(x + y + z) = 0$, donc $u(b) \in P$.
Donc P et D sont stables par u.

2. Démontrer que $P \oplus D = \mathbb{R}^3$.

Correction

On remarque, par la question précédente, que $P = \ker(\varphi)$, où φ est une forme linéaire non nulle.
P est donc un hyperplan. Comme $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \notin P$, on en déduit que $P \oplus D = \mathbb{R}^3$.

3. En considérant un sous-espace vectoriel de P, répondre à la question suivante : « si F est un sous-espace vectoriel stable par u, tout sous-espace vectoriel de F est-il aussi stable par u ? »

Correction

La réponse est NON ! La droite $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$ est un sous-espace vectoriel de P, mais

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\2 & 2 & -1\\-1 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix} \notin \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right).$$

Ce sous-espace vectoriel n'est donc pas stable par u.

A-II. Généralités théoriques

4. Démontrer que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E stables par $u \in \mathscr{L}(E)$, alors $F + G$ et $F \cap G$ sont stables par u.

Correction

. Soit $x \in F + G$. Alors on dispose de f dans F et de g dans G tels que $x = f + g$. On en déduit que $u(x) = u(f) + u(g)$. Comme F est stable par u, $u(f) \in F$ et, de même, $u(g) \in G$. Donc $x \in F + G$. Donc $F + G$ est stable par u.
. Soit $x \in F \cap G$. Alors $u(x) \in F$ car $x \in F$ et $u(x) \in G$ car $x \in G$, donc $u(x) \in F \cap G$. Donc $F \cap G$ est stable par u.

5. Démontrer que si $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$ et $u \circ v = v \circ u$, alors $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v. Dans le cas où u est un projecteur, démontrer qu'il s'agit d'une équivalence.

Correction

Supposons $u \circ v = v \circ u$**.** Soit $x \in \ker(u)$. Alors $u(v(x)) = v(u(x)) = v(0_E) = 0_E$, donc $v(x) \in \ker(u)$, $\boxed{\text{donc } \ker(u) \text{ est stable par } v.}$
Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$. Alors on dispose de $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Alors $v(y) = v(u(x)) = u(v(x)) \in \mathrm{Im}(u)$. $\boxed{\text{Donc } \mathrm{Im}(u) \text{ est stable par } v.}$
Maintenant, si u est un projecteur, supposons que v stabilise $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$. Soit $x \in E$. On sait que l'on dispose de $y \in \mathrm{Im}(u)$ et $z \in \ker(u)$ tels que $x = y + z$. Alors

$$u(v(x)) = u(v(y)) + u(v(z)) = 0 + v(z) \text{ car } v(y) \in \ker(u) \text{ et } v(z) \in \mathrm{Im}(u).$$

De même,

$$v(u(x)) = v(u(y+z)) = v(z) \text{ car } u \text{ est la projection sur } \mathrm{Im}(u) \text{ parallèlement à } \ker(u)$$

Donc on a bien $u \circ v = v \circ u$.

6. Soit p un projecteur. Démontrer que si F est un sous-espace vectoriel de E, F est stable par p si et seulement s'il existe A un sous-espace vectoriel de $\ker(p)$ et B un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Im}(p)$ tels que $F = A \oplus B$.
Pour le sens direct, on pourra essayer de démontrer que $F = (F \cap ker(p)) \oplus (F \cap Im(p))$.

Correction

Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Leftarrow}$ S'il existe A un sous-espace vectoriel de $\ker(p)$ et B un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Im}(p)$ tels que $F = A \oplus B$, soit $x \in E$. Alors on dispose de a dans A et de b dans B tels que $x = a + b$. Alors $p(x) = p(a) + p(b) = b$ car $a \in \ker(p)$ et $b \in \mathrm{Im}(p)$, donc $p(x) \in B$ donc F est stable par p.

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit F un sous-espace stable par p. Démontrons que $F = (F \cap \ker(p)) \oplus (F \cap \mathrm{Im}(p))$. Soit $x \in F$.
Analyse. On suppose qu'il existe $a \in F \cap \ker(p)$ et $b \in F \cap \mathrm{Im}(b)$ tels que $x = a + b$. Alors $p(x) = p(a) + p(b) = b$. Donc $b = p(x)$ et $a = x - p(x)$.
Synthèse. Posons $b = p(x)$ et $a = x - p(x)$. Alors

- $b \in \mathrm{Im}(u)$ et $b \in F$ car $x \in F$ et F est stable par u.
- $p(a) = p(x) - p(p(x)) = 0$ donc $a \in \ker(p)$ et $a \in F$ par stabilité de F par u.
- $a + b = x$.

Donc $F = (F \cap \ker(p)) \oplus (F \cap \mathrm{Im}(p)) = A \oplus B$, avec $A = F \cap \ker(p)$, sev de $\ker(p)$ et $B = F \cap \mathrm{Im}(p)$, sev de $\mathrm{Im}(p)$.

A-III. Existence d'une droite stable dans le cas complexe

Ici, E est de **dimension finie**. On va démontrer ici un joli résultat, **très utile pour la suite** : si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, il existe une droite vectorielle stable par u.

Si $P \in \mathbb{C}[X]$, $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on note $P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k = a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 u + a_2 u^2 + \cdots + a_n u^n$.
On admet que si P et Q sont deux polynômes, $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$. Ainsi, si $P = X - 2$ et $Q = X^2 + 3X + 3$, $(PQ)(u) = (u - \underbrace{2\mathrm{Id}_E}_{\textbf{attention !}}) \circ (u^2 + 2u + 3\mathrm{Id}_E)$.

7. Démontrer qu'il existe un polynôme P non constant tel que $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Correction

On sait que $\mathscr{L}(E)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, égale n^2 (où $n = \dim(E)$). Ainsi, si l'on considère la famille $(\mathrm{Id}_E, u, \ldots, u^{n^2})$, c'est une famille de $n^2 + 1$ éléments de $\mathscr{L}(E)$, elle est donc liée. Donc on dispose de $n^2 + 1$ coefficients $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n^2}$, non tous nuls, tels que

$$\sum_{k=0}^{n^2} a_k u^k = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

Il existe donc un polynôme P tel que $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$. P n'est pas constant car sinon $a_0 \mathrm{Id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$, et $a_0 \neq 0$, ce qui est absurde.

On considère alors Q un polynôme tel que $Q(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$, de degré minimal.

8. Justifier brièvement qu'un tel Q existe et que Q possède au moins une racine $\lambda \in \mathbb{C}$.

Correction

Si l'on considère $A = \{\deg(P),\ P \neq 0_{\mathbb{K}[X]} \text{ et } P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}\}$, alors A est non vide (par la question précédente), incluse dans $\mathbb{N}$, donc elle contient un plus petit élément ! On prend Q qui réalise ce minimum.
On a vu à la question précédente que Q ne pouvait être constant. Ainsi, par le théorème de D'Alembert-Gauss, Q possède une racine complexe.

9. Démontrer que $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas inversible. En déduire qu'il existe x dans $E \setminus \{0_E\}$ tel que $u(x) = \lambda x$ et qu'il existe une droite D stable par u.

Correction

Si $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ était inversible, alors, comme $Q = R \times (X - \lambda)$, on aurait $0 = Q(u) = R(u) \circ (u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ donc, par inversibilité de $u - \lambda \mathrm{Id}_E$, $R(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Ceci contredit la minimalité du degré de Q !
Donc $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas inversible. Comme il s'agit d'un endomorphisme en dimension finie, $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif, donc on dispose de $x \neq 0$ tel que $u(x) - \lambda x = 0$, i.e. $u(x) = \lambda x$. Ainsi, $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par u.

B. Endomorphismes cycliques et semi-simples

Dans cette partie, on suppose que E est un espace vectoriel de **dimension finie**, notons-la n, et u est un endomorphisme de E. On dit que u est **cyclique** s'il existe x dans E tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.

B-I. Endomorphismes nilpotents

Soit u un endomorphisme **nilpotent**, c'est-à-dire qu'il existe k dans $\mathbb{N}$ tel que $u^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

10. Démontrer qu'il existe p dans $\mathbb{N}^*$ tel que $u^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $u^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Correction

On dit simplement que la partie $A = \{k \in \mathbb{N},\ u^k = 0_{\mathscr{L}(E)}\}$ est une partie de $\mathbb{N}$, non vide, donc elle admet un plus petit élément, non nul, car $u^0 = \mathrm{Id}_E$. Si l'on note p ce plus petit élément, alors, par minimalité de p,

11. Justifier qu'il existe un vecteur x tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$, et démontrer que $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre dans E. En déduire que $p \leqslant n$.

Correction

Comme, par hypothèse, $u^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$, on dispose de $x \in E$, non nul, tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.
Soit alors $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$, tels que

$$\lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0_E.$$

Composons l'équation par u^{p-1}. Alors

$$\lambda_0 u^{p-1}(x) + \lambda_1 \underbrace{u^p(x)}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{u^{p+1}(x)}_{=0} + \cdots + \lambda_{p-1} \underbrace{u^{2p-2}(x)}_{=0} = 0_E,$$

donc $\lambda_0 u^{p-1}(x) = 0$, donc, comme $u^{p-1}(x) \neq 0$, $\lambda_0 = 0$.
En composant par u^{p-2}, on montre que $\lambda_1 = 0$ et, par récurrence immédiate, on montre que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{p-1} = 0$. Donc la famille $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est libre dans un espace de dimension n, donc $p \leqslant n$.

On suppose que u est nilpotent d'indice maximal, c'est-à-dire que $p = n$.

12. Justifier qu'alors u est cyclique.

Correction

Si l'on prend $x \in \ker(u^{n-1})$, alors $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une famille libre de n éléments de E, donc une base de E. Donc u est cyclique.

13. Vérifier que la dérivation $D : \left| \begin{array}{c} \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X] \\ P \mapsto P' \end{array} \right.$ est nilpotente d'indice maximal.

Correction

On sait que $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$. Or, si $P \in \mathbb{K}_n[X]$, $P^{(n+1)} = 0$, donc $D^{n+1}(P) = 0$, donc la dérivation est nilpotente. Comme $D(X^n) = n! \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, on en déduit que la dérivation est nilpotente d'indice maximal.

On cherche alors les sous-espaces stables par un endomorphisme nilpotent d'indice maximal.

14. Démontrer que pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$, $\ker(u^k)$ est stable par u et $\dim(\ker(u^k)) = k$.

Correction

Soit $x \in \ker(u^k)$. Alors $u^k(u(x)) = u^{k+1}(x) = 0_E$, donc $\ker(u^k)$ est stable par u.
Pour la dimension, c'est vraiment plus délicat ! Une manière de le démontrer est la suivante : on remarque que $\ker(u) \subset \ker(u^2) \subset \cdots \subset \ker(u^n) = E$. De plus, chaque inclusion est stricte : si x est tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$, alors, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $u^{n-1-k}(x)$ n'est pas dans $\ker(u^k)$ mais est dans $\ker(u^{k+1})$.
On a donc

$$\ker(u^0) \subsetneq \ker(u) \subsetneq \ker(u^2) \subsetneq \cdots \subsetneq \ker(u^n) = E,$$

donc

$$0 = \dim(\ker(u^0)) < \dim(\ker(u)) < \cdots < \dim(\ker(u^n) = n,$$

donc, comme on a des inégalités strictes entre $n+1$ entiers répartis de 0 à n, on en déduit que, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\dim(\ker(u^k)) = k$.

Soit F un sous-espace vectoriel stable par u, de dimension q.

15. Démontrer que : $\forall x \in F$, $u^q(x) = 0$. En déduire que $F = \ker(u^q)$.

On pourra considérer $v : \left| \begin{array}{l} F \to F \\ x \mapsto u(x) \end{array} \right.$.

Correction

Comme F est stable par u, on peut considérer $v : \left| \begin{array}{l} F \to F \\ x \mapsto u(x) \end{array} \right.$. Comme u est nilpotent, v est aussi nilpotent. On en déduit donc, comme $q = \dim(F)$, que $v^q = 0_{\mathscr{L}(F)}$, ce qui signifie que pour tout x dans F, $u^q(x) = 0_E$.

Ainsi, $F \subset \ker(u^q)$, mais les deux sous-espaces vectoriels sont de même dimension. Donc $F = \ker(u^q)$.

16. Ainsi, quels sont les sous-espaces de $\mathbb{K}_n[X]$ stables par l'endomorphisme de dérivation ?

Correction

Comme $\ker(D) = \mathbb{K}_0[X]$ et, par récurrence immédiate, $\ker(D^q) = \mathbb{K}_q[X]$, on en déduit que les seuls sous-espaces vectoriels stables par D sont tous les $\mathbb{K}_q[X]$!

B-II. Endomorphismes simples

Soit u un endomorphisme **simple**, i.e. dont les seuls sous-espaces stables par u sont $\{0_E\}$ et E. Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. Notons $p = \max\{k \in \mathbb{N}^*,\ (x, u(x), \dots, u^{k-1}(x)) \text{ est libre}\}$. ($p$ existe, on a déjà fait 2 fois cette question durant ce DS !)

17. Démontrer que $\mathrm{Vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est stable par u. Conclure que u est cyclique.

Correction

Soit $y \in \mathrm{Vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$. On dispose alors de $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $y = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x)$. On a alors

$$u(y) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^{k+1}(x) = \lambda_0 u(x) + \cdots + \lambda_{p-2} u^{p-1}(x) + \lambda_{p-1} u^p(x).$$

Mais $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre, alors que $(x, u(x), \dots, u^p(x))$ ne l'est pas. Donc $u^p(x) \in \mathrm{Vect}(x, \dots, u^{p-1}(x))$. Donc $u(y) \in \mathrm{Vect}(x, \dots, u^{p-1}(x))$.
Donc $\mathrm{Vect}(x, \dots, u^{p-1}(x))$ est stable par u. Comme cet espace n'est pas réduit à 0 et que u est simple, on en déduit que $\mathrm{Vect}(x, \dots, u^{p-1}(x)) = E$. Donc $(x, \dots, u^{p-1}(x))$ engendre E, donc $p = n$ et u est cyclique.

18. Quels sont les endomorphismes simples d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie ?

Correction

Soit u un tel endomorphisme. On a vu dans la partie A-III. que u possédait une droite D stable. Mais comme u est simple, on en déduit que $D = E$.
Donc $\boxed{\text{si } \dim(E) > 1,\ E \text{ n'admet pas d'endomorphisme simple.}}$ Si $\dim(E) = 1$, tous les endomorphismes de E sont simples.

B-III. Endomorphismes semi-simples

Dans cette partie, le corps de base est $\mathbb{C}$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, **semi-simple**, c'est-à-dire que tout sous-espace vectoriel F de E stable par u admet un supplémentaire, lui-aussi stable par u.

19. Vérifier qu'un projecteur est semi-simple.

Correction

C'est juste une question qui permet de voir si l'on a lu le sujet ! Soit p un projecteur, F un sous-espace vectoriel stable par p. On sait, par la question 6., que $F = A \oplus B$ avec A un sous-espace vectoriel de $\ker(p)$ et B un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Im}(p)$. Soit C un supplémentaire de A dans $\ker(p)$ et D un supplémentaire de B dans $\mathrm{Im}(p)$. Alors $C \oplus D$ est stable par p et $(A \oplus B) \oplus (C \oplus D) = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$, donc F admet bien un supplémentaire stable par p.

20. Démontrer qu'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$, H un hyperplan tels que $\mathrm{Vect}(x) \oplus H = E$ et tels que $\mathrm{Vect}(x)$ et H soient stables par u. *On pourra utiliser la partie A-III.*

Correction

On sait, par la partie A-III., qu'il existe x dans $E \setminus \{0_E\}$ tel que $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par u.
Mais u est semi-simple donc on dispose d'un supplémentaire H de $\mathrm{Vect}(x)$ qui soit stable par u.

21. Démontrer que l'application $v : \left| \begin{array}{l} H \to H \\ x \mapsto u(x) \end{array} \right.$ est semi-simple. *Il pourra être utile de démontrer que si A, B, C sont trois s.e.v. de E tels que $A \subset B$ et $A \oplus C = E$, alors $A \oplus (B \cap C) = B$.*

Correction

Soit F un sous-espace vectoriel **de** H stable par v. Il faut trouver un supplémentaire de F **dans** H qui soit stable par v.
Comme u est semi-simple, on dispose d'un supplémentaire G de F **dans** E qui soit stable par u.
On a donc $F \oplus G = E$ et $F \subset H$. Établissons alors le résultat préliminaire : « si A, B, C sont trois s.e.v. de E tels que $A \subset B$ et $A \oplus C = E$, alors $A \oplus (B \cap C) = B$ »

- soit $x \in A \cap (B \cap C)$. Alors $x \in A$ et $x \in C$ donc $x \in A \cap C = \{0_E\}$, donc $x = 0_E$. Donc $A \cap (B \cap C) = \{0_E\}$.
- soit $x \in B$. Comme $x \in E$, on dispose de $a \in A$ et $c \in C$ tels que $x = a + c$. Mais alors $c = x - a \in B$, donc $c \in B \cap C$. Donc $x = \underbrace{a}_{\in A} + \underbrace{c}_{\in B \cap C}$.

Donc $A \oplus (B \cap C) = B$.
Donc, par ce résultat, $F \oplus (G \cap H) = E$.
Or, $G \cap H$ est stable par v car G et H sont stables par u, donc F admet bien un supplémentaire stable par v. Donc v est bien semi-simple.

22. En déduire qu'il existe une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $u(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$.

Correction

On démontre le résultat par récurrence ! La question 20. permet de passer de la dimension n à la dimension $n - 1$, la question 21. permet de s'assurer que l'on peut appliquer l'hypothèse de récurrence au supplémentaire stable.

C. Endomorphismes de permutation

Dans cette section, on suppose que $E = \mathbb{R}^n$. On fixe, jusqu'à la fin du problème, $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de E. Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on définit l'endomorphisme f_σ par $\forall i \in [\![1, n]\!],\ f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$. Par exemple, si $n = 4$ et

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, alors

$$f_\sigma\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = f_\sigma(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4) = x_1e_4 + x_2e_3 + x_3e_1 + x_4e_2 = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

23. **Un exemple.** Dans cette question, $E = \mathbb{R}^4$, et σ est le cycle $(1\ 3\ 4)$. Représenter la matrice A de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telle que f_σ soit associée à la matrice A.

Correction

Si on applique exactement la méthode vue précédemment, si $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned} f_\sigma\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) &= f_\sigma(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4) \\ &= x_1e_3 + x_2e_2 + x_3e_4 + x_4e_1 = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

24. Vérifier que pour tout σ dans $\mathcal{S}_n$, $f_\sigma \in GL(E)$ et que $\Phi : \left| \begin{array}{l} \mathcal{S}_n \to GL(E) \\ \sigma \mapsto f_\sigma \end{array} \right.$ est un morphisme de groupes.

Correction

Soient σ et ρ dans $\mathcal{S}_n$. Alors, pour tout i dans $[\![1, n]\!]$,

$$f_{\sigma\circ\rho}(e_i) = e_{\sigma\circ\rho(i)} = f_\sigma(e_{\rho(i)}) = f\sigma \circ f_\rho(e_i),$$

donc, par égalité sur les éléments d'une base, $f_{\sigma\circ\rho} = f_\sigma \circ f_\rho$.
On a donc, si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $f_\sigma \circ f_{\sigma^{-1}} = f_{\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}} = \mathrm{Id}_E$ et $f_{\sigma^{-1}} \circ f_\sigma = f_{\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}} = \mathrm{Id}_E$. Donc $f_\sigma \in GL(E)$.

25. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i \neq j$ et $\tau = (i\ j)$ la transposition (qui échange i et j et fixe tous les autres points). Démontrer que f_τ est une symétrie parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_i - e_j)$, par rapport à un sous-espace à préciser.

Correction

On remarque que $f_\tau \circ f_\tau = f_{\tau^2} = f_{\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}} = \mathrm{Id}_E$, donc f_τ est une symétrie. On détermine alors $\ker(f_\tau - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f_\tau + \mathrm{Id}_E)$:

- soit $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in \ker(f_\tau - \mathrm{Id}_E)$. Alors $f_\tau(x) = x$, donc

$$\sum_{k=1}^{n} x_k f_\tau(e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k,$$

donc $x_ie_j + x_je_i + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\notin\{i,j\}}} x_ke_k = x_ie_i + x_je_j + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\notin\{i,j\}}} x_ke_k$, donc $x_i = x_j$, donc $x \in \operatorname{Vect}\left((e_k)_{k\in[\![1,n]\!]\setminus\{i,j\}} \uplus (e_i+e_j)\right)$.
Réciproquement, un élément de $\operatorname{Vect}\left((e_k)_{k\in[\![1,n]\!]\setminus\{i,j\}} \uplus (e_i+e_j)\right)$ est bien dans $\ker(f_\tau - \mathrm{Id}_E)$.

- soit $x = \sum_{k=1}^n x_ke_k \in \ker(f_\tau + \mathrm{Id}_E)$.
  Alors $f_\tau(x) = -x$, donc $\sum_{k=1}^n x_kf_\tau(e_k) = -\sum_{k=1}^n x_ke_k$.
  Donc $x_ie_j + x_je_i + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\notin\{i,j\}}} x_ke_k = -x_ie_i - x_je_j - \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\notin\{i,j\}}} x_ke_k$, donc pour tout i dans $[\![1,n]\!]\setminus\{i,j\}$, $x_k = 0$ et $x_i = -x_j$, donc $x \in \operatorname{Vect}(e_i - e_j)$. Réciproquement, un élément de $\operatorname{Vect}(e_i-e_j)$ est bien dans $\ker(f_\tau + \mathrm{Id}_E)$.

Donc f_τ est une symétrie par rapport à $\operatorname{Vect}\left((e_k)_{k\in[\![1,n]\!]\setminus\{i,j\}} \uplus (e_i+e_j)\right)$, parallèlement à $\operatorname{Vect}(e_i - e_j)$.

Soit $D = \operatorname{Vect}(\varepsilon)$, où $\varepsilon = \sum_{i=1}^n e_i$ et soit H l'hyperplan vectoriel $H = \left\{\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \in E,\ x_1+\dots+x_n = 0\right\}$

Un sous-espace vectoriel de F de E est dit $\mathcal{S}_n$-stable lorsque, pour tout $\sigma\in\mathcal{S}_n$, $f_\sigma(F)\subset F$.

26. Préciser la dimension de H et en donner une base.

Correction

H est un hyperplan donc il est de dimension $n-1$. Or, la famille $(e_1 - e_i)_{2\leqslant i\leqslant n}$ est une famille libre d'éléments de H, donc c'en est une base. Vérifions-en la liberté : si $(\lambda_2,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^{n-1}$ sont tels que $\sum_{i=2}^n \lambda_i(e_1 - e_i) = 0$, on a $\left(\sum_{i=2}^n \lambda_i\right)e_1 - \sum_{i=2}^n \lambda_ie_i = 0$, donc, par liberté de $(e_1,\dots,e_n)$, $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

27. Démontrer que D et H sont $\mathcal{S}_n$-stables et que $E = D\oplus H$.

Correction

Déjà, la supplémentarité est évidente, car $D = \overrightarrow{(}\varepsilon)$ et $\varepsilon\notin H$.
Ensuite, si $\sigma\in\mathcal{S}_n$, alors

- $f_\sigma(\varepsilon) = f_\sigma\left(\sum_{i=1}^n e_i\right) = \sum_{i=1}^n e_{\sigma(i)} = \sum_{j=1}^n e_i = \varepsilon$, car σ est une bijection de $[\![1,n]\!]$. Donc D est $\mathcal{S}_n$-stable.
- si $x = \begin{pmatrix} x_1\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix}\in H$, alors $x = \sum_{i=1}^n x_ie_i$ et $f_\sigma(x) = \sum_{i=1}^n x_ie_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^n x_{\sigma^{-1}(i)}e_i$. Or, $\sum_{i=1}^n x_{\sigma^{-1}(i)} = \sum_{i=1}^n x_i = 0$, d'où $f_\sigma(x)\in H$. Donc H est $\mathcal{S}_n$-stable.

On cherche désormais à déterminer tous les sous-espaces $\mathcal{S}_n$-stables. Soit F un tel sous-espace, non réduit à $\{0_E\}$.

28. Si pour tout $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F$, on a $x_1 = \cdots = x_n$, conclure à la nature de F.

Correction

L'hypothèse formulée est que $F \subset D$. Dans ce cas, $F = \{0\}$ ou $F = D$. Comme D est σ-stable, on a bien $F = D$.

On suppose donc qu'il existe $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F$ et $i \neq j$ tels que $x_i \neq x_j$.

29. En considérant la transposition $\tau = (i\ j)$, démontrer que $e_i - e_j \in \mathrm{Vect}(f_\sigma(x))_{\sigma \in \mathcal{S}_n}$, et que $e_i - e_j \in F$.

Correction

Déjà, $f_{\mathrm{Id}}(x) = x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \notin \{i,j\}}} x_k e_k + x_i e_i + x_j e_j$ et donc $f_\tau(x) = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \notin \{i,j\}}} x_k e_k + x_j e_i + x_i e_j$.

Ainsi,

$$f_{\mathrm{Id}}(x) - f_\tau(x) = (x_i - x_j)(e_i - e_j)$$

et, comme $x_i - x_j \neq 0$, $e_i - e_j \in \mathrm{Vect}(f_{\mathrm{Id}}(x), f_\tau(x)) \subset \mathrm{Vect}(f_\sigma(x))_{\sigma \in \mathcal{S}_n}$. Comme F est $\mathcal{S}_n$-stable, $\mathrm{Vect}(f_\sigma(x))_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \subset F$, donc $e_i - e_j \in F$.

30. En déduire, en considérant d'autres transpositions bien choisies, que pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $e_1 - e_k \in F$.

Correction

- Si $i = 1$ ou $j = 1$, on a déjà $e_1 - e_i$ ou $e_1 - e_j$ qui est dans F.
- Sinon, on prend $\tau = (1\ i)$ et alors $f_\tau(e_i - e_j) \in F$, donc $e_1 - e_j \in F$.

Dans tous les cas, on peut supposer $j \neq 1$ et avoir $e_1 - e_j \in F$.
Ensuite, si $k \in [\![2, n]\!]$, alors en prenant $\tau = (k\ j)$, alors $f_\tau(e_1 - e_j) \in F$, donc $e_1 - e_k \in F$.

31. Déterminer les sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}_n$-stables de E.

Correction

On a vu donc que si F est un sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_n$-stable de E, alors

- ou bien $F = D$,
- ou bien F contient une base de H, et donc $F = H$.

La réciproque a déjà été démontrée !