

Espaces vectoriels et applications linéaires

Révisions sur la dimension finie.

Équations différentielles linéaires

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

b) Équations différentielles linéaires du premier ordre

Équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' + a(x)y = b(x)$$

où a et b sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle I de \mathbb{R} .

Ensemble des solutions de l'équation homogène.

Principe de superposition.

Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.

Méthode de la variation de la constante.

Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Équation homogène associée.

Cas particulier où la fonction a est constante.

c) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

où a et b sont des scalaires et f est une fonction réelle ou complexe, définie et continue sur un intervalle.

Ensemble des solutions de l'équation homogène.

Principe de superposition.

Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.

Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Équation homogène associée.

Si a et b sont réels, description des solutions réelles.

Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme, de la forme $x \mapsto Ae^{\lambda x}$ avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto B \cos(\omega x)$ et $x \mapsto B \sin(\omega x)$ avec $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$.

La démonstration de ce résultat est hors programme.

Organisation de la colle.

- cours sur les équations différentielles.
- exercices sur les équations différentielles et de révision sur la dimension.

Exemples de questions de cours

1. En admettant l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy, expliquer pourquoi l'ensemble des solutions de $y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)y^{(i)} = 0$ est un espace vectoriel de dimension n .
2. Structure des solutions de $y' + a(x)y = 0$.
3. Méthode de variation de la constante : description générale ou application sur un exemple.
4. Formulation intégrale de la solution d'un problème de Cauchy du premier ordre.
5. Second ordre à coefficients constants : si $aX^2 + bX + c$ a deux racines distinctes r_1 et r_2 , $\text{Ker}(aD^2 + bD + c\text{Id}) = \text{Ker}(D - r_1\text{Id}) \oplus \text{Ker}(D - r_2\text{Id})$.
6. Second ordre à coefficients constants : si $aX^2 + bX + c$ a une racine double r_0 , $\text{Ker}(aD^2 + bD + c\text{Id}) = \{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{r_0 x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$.
7. Second ordre à coefficients constants : cas réel où $aX^2 + bX + c$ a un discriminant négatif.