TD 21
Équations différentielles

1 Les exercices corrigés en classe

Exercice 1. *Trois calculs.* ●●○ Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $y' - y = e^x$ sur $\mathbb{R}$
2. $y' - \ln(x)y = x^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. $y'' + 4y = \sin(2x)$.

Exercice 2. *Changement de variables.* On s'intéresse à l'équation différentielle

$$x^2y'' - xy' - 3y = x^4, \tag{E}$$

que l'on va résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si, et seulement si la fonction $g : t \mapsto f(e^t)$ est solution sur $\mathbb{R}$ d'une certaine équation différentielle linéaire à coefficients constants que l'on précisera.
2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3. *Expression de solutions particulières par convolution.* ●●○ Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $\varphi : x \mapsto \int_0^x \sin(x-t)g(t)dt$. Démontrer que φ est dérivable et déterminer une équation différentielle du second ordre vérifiée par φ.
2. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = g$.
3. Soit f une fonction telle que $f'' + f$ est toujours positive. Démontrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) + f(x+\pi)$ est positif.

Exercice 4. ●○○ On veut déterminer les fonctions f deux fois dérivables qui vérifient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(-x) = e^x$$

1. Soit f une solution de l'équation. Quelle équation est vérifiée par $g : x \mapsto f(-x)$?
2. En déduire les équations différentielles vérifiées par les parties paire et impaire de f, et conclure.

Exercice 5. Soient a et b deux fonctions continues et T-périodiques sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si $\int_0^T a(t)dt \neq 0$, alors l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ admet une unique solution T-périodique.
2. Que se passe-t-il si a est de valeur moyenne nulle ?

2 Les exercices à faire en TD

Plan de travail

- pour les **calculs classiques**, travailler les exercices, 6, 8.
- pour des **calculs plus originaux**, travailler les exercices 9 et 10
- pour les **changements de fonction inconnue ou de variable** dans les équations différentielles, regarder les exercices 11 (un changement de fonction inconnue au lieu d'un changement de variables, exercice très intéressant !) et 13 (prolongement de l'exercice 2) ou 14 (histoire de faire un autre changement de variables).
- des méthodes dites d'**abaissement de l'ordre** (qui passent d'un ordre élevé à un ordre raisonnable) : regarder les exercices 12 et 15.
- pour les **équations fonctionnelles**, regarder l'exercice 18 ou le 17.
- l'exercice 22 est d'un genre un peu différent, plus théorique

Exercice 6. *Équations du premier ordre*. ●◐○ Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle indiqué. Si aucune condition initiale n'est donnée, donner la forme générale des solutions.

1. $2y' - 3y = 0$ sur $\mathbb{R}$

2. $xy' - ay = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

3. $y' - 2y = \sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$.

4. $(x^2+1)y' + 2xy + 1 = 0$ sur $\mathbb{R}$.

5. $y' + y = \mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^x)$ sur $\mathbb{R}$.

6. $(x+i)y' + y = 1 + 2\mathrm{Arctan}(x)$ sur $\mathbb{R}$.

7. $x(x+4)y' + 2(x-2)y = 1$ sur ? ?

8. $y' - \dfrac{y}{x} = \sqrt{1+\ln(x)}$ sur $[1/\mathrm{e}, +\infty[$.

9. $y' + y = |x|$ sur $\mathbb{R}$.

10. $xy' - 2y = x^3\sin(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

11. $\begin{cases} y' + y = x + 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$.

12. $\begin{cases} y' + 2y = 0, \\ y(2) = 0. \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$.

13. $\begin{cases} y' + 2xy = e^{x-x^2}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$.

14. $\begin{cases} y' + x(y+1) = 0, \\ y(0) = 0. \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. Résoudre l'équation suivante $y' = 1 + y^2$ (sur un intervalle I à déterminer !)

Exercice 8. *Équations du second ordre à coefficients constants*. ●◐○ Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$. Si aucune condition initiale n'est donnée, donner la forme générale des solutions.

1. $y'' + y = 0$

2. $y'' - 3y' + 2y = 0$.

3. $y'' - 2y + y = 0$.

4. $y'' + 2y' + y = e^x$.

5. $4y'' + y = 5\cos\dfrac{x}{2}$.

6. $y'' - 2y' + 2y = \cos(x)\mathrm{ch}(x)$.

7. $\begin{cases} y'' + y' - 2y = \sin(x), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} y'' + 5y' + 4y = \mathrm{e}^{-x}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

Exercice 9. ●●○ Résoudre l'équation $y'' + 3y' + 2y = xe^{-x}$ en cherchant une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2 fois une exponentielle.

Exercice 10. ●●○ Résoudre le système d'équations différentielles suivant

$$\begin{cases} y' + 2y = z \\ z' + 3z = 2y + 1 \end{cases}$$

On considèrera, si y et z sont deux solutions de l'équation, $f = y + \omega z$ avec ω un nombre complexe, ou on fera une méthode par substitution.

Exercice 11. *Équation de Bernoulli*. ●●○ On note (E_1) l'équation différentielle

$$-x^2 z'(x) + xz(x) = z^2(x). \qquad (E_1)$$

On recherche les fonctions z solutions de $(E1)$ sur $K =]1; +\infty[$ et qui ne s'annulent pas sur K.

1. On pose $y = \dfrac{1}{z}$. Vérifier que y est solution sur K d'une équation différentielle linéaire du premier ordre (E_2).
2. Résoudre (E_2) sur K. On vérifiera ensuite que ces solutions sont de la forme
$$g_a : x \mapsto \frac{\ln(ax)}{x}.$$
Vérifier que pour $a > 1$, g_a ne s'annule pas sur K. On a donc ainsi $z(x) = \dfrac{x}{\ln(ax)}$.
3. Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy
$$\begin{cases} \forall x \in K,\ -x^2 z'(x) + xz(x) = z^2(x) \\ z(2) = 2 \end{cases}$$
4. Pour $a > 0$, on note (C_a) la courbe représentative de la fonction $f_a : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(ax)}$. Montrer que (C_a) est l'image de (C_1) par une homothétie de centre O dont on précisera le rapport.

Exercice 12. ●●○ On considère l'équation

$$y''' - 3y'' + y' + y = 0.$$

1. En considérant une équation d'ordre 2 à coefficients constants vérifiée par $z = y' - y$, résoudre l'équation différentielle ci-dessus.
2. Développer $(x^2 - 2x - 1)(x - 1)$. Que remarquez-vous ?

Exercice 13. ●●○ On s'intéresse à l'équation différentielle

$$x^2 y'' - xy' - 3y = x^4. \qquad \text{(E)}$$

1. Quels sont les intervalles maximaux sur lesquels on peut résoudre (E), *a priori* ?
2. Résolution sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (a) Montrer que f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si, et seulement si la fonction $g : t \mapsto f(\mathrm{e}^t)$ est solution sur $\mathbb{R}$ d'une certaine équation différentielle linéaire à coefficients constants que l'on précisera.
   (b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Résolution sur $\mathbb{R}_-^*$.
   (a) Montrer que f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si, et seulement si la fonction $g : t \mapsto f(-e^t)$ est solution sur $\mathbb{R}$ d'une certaine équation différentielle linéaire à coefficients constants que l'on précisera.
   (b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_-^*$.

4. Déterminer les solutions de (E) définies et dérivables sur tout $\mathbb{R}$.

Exercice 14. ●●○ On considère l'équation suivante

$$\left(1-x^2\right)y''(x)-xy'(x)+y(x)=0$$

1. En considérant $z(t)=y(\cos(t))$, résoudre l'équation sur $]-1,1[$.

2. Proposer une stratégie similaire pour résoudre l'équation sur $]-\infty,-1[$ et sur $]1,+\infty[$.

Exercice 15. ●●○ On considère l'équation

$$(2x+1)y''+(4x-2)y'-8y=0$$

1. Déterminer une solution de la forme $x\mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$.

2. En divisant par la solution trouvée, résoudre l'équation différentielle.

Exercice 16. *Une équation pas vraiment linéaire*. ●●◐ On considère l'équation $xy'=|y-1|$, que l'on veut résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Soit une solution de l'équation ne valant jamais 1. Déterminer, en disjoignant les cas, la forme de cette solution.

2. Démontrer qu'en fait, une solution de l'équation différentielle ne peut jamais valoir 1.

Exercice 17. ●●◐ Déterminer l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$f(x)=\sin(x)+2\int_0^x \mathrm{e}^{x-t}f(t)dt.$$

Exercice 18. ●●○ Soit $a>0$. On cherche les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x>0,\ f'(x)=f\left(\frac{a}{x}\right)$$

1. Démontrer que si f satisfait cette équation fonctionnelle, alors elle est $\mathscr{C}^2$ et satisfait une équation différentielle du second ordre, à coefficients non constants, que l'on précisera.

2. Déterminer les fonctions de la forme $x\mapsto x^\alpha$ solutions de l'équation précédente, et résoudre entièrement l'équation fonctionnelle.

Exercice 19. ●●◐ Déterminer toutes les fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout x réel,

$$f'(x)=f(2-x).$$

Exercice 20. ●●○ Soit $a,b:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues définies sur un intervalle I et $x_0\in\mathrm{I}$. Montrer que les tangentes en x_0 des différentes solutions de l'équation différentielle $y'=a(x)y+b(x)$ sont soit parallèles, soit concourantes.

Exercice 21. *Lemme de Gronwall*. ●●◐

1. Soit $C\in\mathbb{R}$ et $u,v\in C^0(\mathbb{R}_+)$ telles que $v\geqslant 0$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+, u(x)\leqslant C+\displaystyle\int_0^x u(t)\,v(t)\,dt$.

Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}_+, u(x)\leqslant C\,\exp\left(\displaystyle\int_0^x v(t)\,dt\right)$.

2. **Application.** Soit $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction k-lispchitzienne et $f,g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ deux solutions de l'équation différentielle (non linéaire) $y'=H(y)$ (c'est-à-dire que $f'=H\circ f$ et $g'=H\circ g$).
Montrer $\forall x\in\mathbb{R}_+, \left|f(x)-g(x)\right|\leqslant e^{kx}\,|f(0)-g(0)|$.

Exercice 22. ●●● Déterminer l'ensemble des couples de complexes (α,β) tels que toute solution de $y''+\alpha y+\beta=0$ soit bornée.