MPSI1 – Programme de colles – Semaine 25 – du 13 au 17 avril 2026

Dénombrement

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Cardinal d'un ensemble fini	
Cardinal d'un ensemble fini.	Notations $\|A\|$, $\mathrm{Card}(A)$. Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.	
Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque, complémentaire, différence, produit cartésien. Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.	La formule du crible est hors programme.
b) Listes et combinaisons	
Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n.	Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n.
Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.	Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

Probabilités

A - Probabilités sur un univers fini, variables aléatoires et lois

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Univers, événements, variables aléatoires	
Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités.	On se limite au cas d'un univers fini. Événement élémentaire (singleton), système complet d'événements, événements disjoints (ou incompatibles).
Une variable aléatoire X est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E.	Notations $\{X \in A\}$ et $(X \in A)$.
b) Espaces probabilisés finis	
Probabilité sur un univers fini.	Espace probabilisé fini (Ω, P). Notations $P(X \in A)$, $P(X = x)$ et $P(X \leqslant x)$.
Une distribution de probabilités sur un ensemble E est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par E et de somme 1. Une distribution de probabilités sur un ensemble fini est une famille de réels positifs indexée par cet ensemble et de somme 1. Probabilité uniforme.	Une probabilité P sur Ω est déterminée par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$.
Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance.	La formule du crible est hors programme.
c) Probabilités conditionnelles	
Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$. L'application P_B est une probabilité.	
Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.	Par convention, $P(A\|B)P(B) = 0$ lorsque $P(B) = 0$.

Contenus	Capacités & Commentaires
d) Loi d'une variable aléatoire	
Loi P_X d'une variable aléatoire X à valeurs dans E.	La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X=x))_{x\in E}$. On note $X \sim Y$ la relation $P_X = P_Y$.
Variable aléatoire $f(X)$.	Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.
Variable uniforme sur un ensemble fini non vide E.	Notation $X \sim \mathcal{U}(E)$.
Variable de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.	Notation $X \sim \mathcal{B}(p)$. Interprétation comme succès d'une expérience.
Variable binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.	Notation $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.
Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A.	
Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.	Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X=x, Y=y)$. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.
e) Événements indépendants	
Les événements A et B sont indépendants si $P(A\cap B) = P(A)P(B)$.	Si $P(B)>0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A\|B) = P(A)$.
Famille finie d'événements indépendants.	L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance. Extension au cas de n événements.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	
f) Variables aléatoires indépendantes	
Les variables aléatoires X et Y définies sur l'univers Ω sont indépendantes si pour tout $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$ et tout $B \in \mathcal{P}(Y(\Omega))$, les événements $(X\in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.	Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. Cette condition équivaut au fait que la distribution de probabilités de (X,Y) est donnée par $P\big((X,Y)=(x,y)\big) = P(X=x)P(Y=y)$.
Extension aux n-uplets de variables aléatoires.	Modélisation de n expériences aléatoires indépendantes par une suite finie $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de variables aléatoires indépendantes.
Si $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1+\dots+X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$.	Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de n expériences indépendantes ayant chacune la probabilité p de succès.
Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.	
Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1,\dots,X_m)$ et $g(X_{m+1},\dots,X_n)$ le sont aussi.	Extension au cas de plus de deux coalitions.

Organisation de la colle.

- Cours de dénombrement et de probabilités.
- Exercices de dénombrement et de probabilités : pour le dénombrement, le programme précise que l'utilisation de bijections n'est pas un attendu du programme ; pour les probabilités, se limiter aux variables aléatoires et aux lois. **L'indépendance de variables aléatoires sera vue lundi seulement !**

Exemples de questions de cours

1. Définition des listes, arrangements, combinaisons.
2. Preuve dénombrabiliste d'une de ces identités : on n'insistera pas sur l'établissement de bijections.
   (i) la symétrie des coefficients binomiaux $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
   (ii) la formule de Pascal : $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$
   (iii) la formule $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$
   (iv) le « lemme des chefs » (présentation vraiment avec les mains) : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$
   (v) la formule de Vandermonde $\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$
3. Définition d'une probabilité conditionnelle + ceci définit bien une loi de probabilité.