Problème 2. Une inégalité polynomiale

Dans tout le problème, d est un entier supérieur ou égal à 1 . Si $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré d, avec $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on appelle norme de P la quantité $N(P) = \max_{0 \leqslant i \leqslant d} |a_i|$.

On appelle mesure de Mahler de P la quantité $M(P) = |a_d| \prod_{i=1}^{d} \max\left(1, |r_i|\right)$, où les r_i sont les racines complexes de P comptées avec multiplicités : si $P = 3(X-2)(X-1/2)(X+4)^2$, alors $M(P) = 3 \times 2 \times \underbrace{1}_{\text{car } |1/2|<1} \times 4 \times 4$.

L'objectif du problème est de montrer que si P est de degré d, et sans racine de module 1, alors

$$M(P) \leqslant \sqrt{d+1}\, N(P).$$

A. Un calcul d'intégrale

Soit $r \in \mathbb{R} \backslash \{\pm 1\}$ et $\mathrm{I}(r) = \int_0^{2\pi} \ln\left(r^2 - 2r\cos(t) + 1\right) dt$.

1. Justifier l'existence de $\mathrm{I}(r)$.

Correction. La fonction $t \mapsto \ln\left(r^2 - 2r\cos(t) + 1\right)$ est bien définie sur $[0, 2\pi]$. En effet, $r^2 - 2r\cos(t) + 1$ vaut, au minimum, $r^2 - 2|r| + 1 = (|r|-1)^2 \neq 0$, car $r \neq \pm 1$. Donc $r^2 - 2r\cos(t) + 1$ est strictement positive pour tout t dans $[0, 2\pi]$, donc $t \mapsto \ln\left(r^2 - 2r\cos(t) + 1\right)$ est définie et continue sur $[0, 2\pi]$, donc son intégrale existe.

2. Montrer, à l'aide d'une relation de Chasles et d'un changement de variables, que

$$\mathrm{I}(r) = 2\int_0^{\pi} \ln\left(r^2 - 2r\cos(t) + 1\right) dt.$$

Correction. On écrit que

$$\begin{aligned} \mathrm{I}(r) &= \int_0^{2\pi} \ln\left(r^2 - 2r\cos(t) + 1\right) dt \\ &= \int_0^{\pi} \ln\left(r^2 - 2r\cos(t) + 1\right) dt + \int_{\pi}^{2\pi} \ln\left(r^2 - 2r\cos(t) + 1\right) dt. \end{aligned}$$

Dans la deuxième intégrale, posons $u = 2\pi - t$. Alors quand $t = \pi$, $u = \pi$ et, quand $t = 2\pi$, $u = 0$.De plus, $\cos(t) = \cos(u)$ et $dt = -du$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{2\pi} \ln\left(r^2 - 2r\cos(t) + 1\right) dt &= -\int_{\pi}^{0} \ln\left(r^2 - 2r\cos(u) + 1\right) du \\ &= \int_0^{\pi} \ln\left(r^2 - 2r\cos(u) + 1\right) du, \end{aligned}$$

$\boxed{\text{d'où } \mathrm{I}(r) = 2\int_0^{\pi} \ln\left(r^2 - 2r\cos(t) + 1\right) dt.}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la décomposition en produit d'irréductibles de $X^{2n} - 1$ sur $\mathbb{C}$, puis sur $\mathbb{R}$.

Correction. C'est une question... de cours !

$$\begin{aligned} X^{2n}-1 &= \prod_{k=0}^{2n-1}(X-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{2n}}) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1}(X-\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}})\prod_{k=n}^{2n-1}(X-\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}). \end{aligned}$$

$X^{2n}-1$ a deux racines réelles qui sont 1 et -1, toutes les autres sont complexes non réelles et se regroupent deux par deux chacune avec sa conjuguée :
Ainsi,

$$\begin{aligned} X^{2n}-1 &= \prod_{k=1}^{n-1}(X-\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}})(X-\overline{\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}})\times(X-1)(X+1) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)X+1\right)(X-1)(X+1) \end{aligned}$$

OLD VERSION
L'idée est d'associer les racines conjuguées les unes des autres... or,

$$\overline{\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}} = \mathrm{e}^{-\frac{ik\pi}{n}} = \mathrm{e}^{2i\pi-\frac{ik\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{i(2n-k)\pi}{n}}.$$

Effectuons donc, dans le deuxième produit, le changement d'indice $\ell = 2n-k$. Alors

$$\begin{aligned} \prod_{k=n}^{2n-1}(X-\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}) &= \prod_{\ell=1}^{n}(X-\mathrm{e}^{\frac{i(2n-\ell)\pi}{n}}) \\ &= \prod_{\ell=1}^{n}(X-\overline{\mathrm{e}^{\frac{i\ell\pi}{n}}}) \\ &= \prod_{\ell=0}^{n-1}(X-\overline{\mathrm{e}^{\frac{i\ell\pi}{n}}}). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} X^{2n}-1 &= \prod_{k=0}^{n-1}(X-\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}})(X-\overline{\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}}) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)X+1\right) \end{aligned}$$

4. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(r) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(1-2r\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+r^2\right)$. En calculant, de deux manières différentes, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|P_n(r)|$, démontrer que

$$\mathrm{I}(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } |r|<1 \\ 4\pi\ln|r| & \text{si } |r|>1. \end{cases}$$

On pourra reconnaître une somme de Riemann.

Correction.

- **Calcul direct.**
  Pour $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ on a $P_n(r) = (r^{2n} - 1)\dfrac{r-1}{r+1}$.
  Déjà, si $|r| < 1$, alors
  $$r^{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
  donc
  $$P_n(r) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \left|\frac{1-r}{1+r}\right|,$$
  d'où
  $$\frac{1}{n}\ln|P_n(r)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
  En revanche, si $|r| > 1$, $|r^{2n}| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et, ainsi,
  $$\frac{1}{n}\ln\left|r^{2n}-1\right| = \frac{1}{n}\ln|r^{2n}| + \frac{1}{n}\ln\left|1 - 1/r^{2n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{2\ln|r|.}$$
  et donc
  $$\frac{1}{n}\ln|P_n(r)| = \frac{1}{n}\ln\left|r^{2n}-1\right| + \frac{1}{n}\ln\left|\frac{1-r}{1+r}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\ln|r|.$$
- **Calcul pas direct.** On écrit explicitement, à l'aide de la factorisation,
  $$\begin{aligned}\frac{1}{n}\ln|P_n(r)| &= \frac{1}{n}\ln\left|\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - 2r\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + r^2\right)\right| \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left|1 - 2r\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + r^2\right|.\end{aligned}$$
  Or, la fonction $\theta \mapsto 1 - 2r\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) + r^2$ est continue sur $[0, 1]$ donc, d'après le théorème de convergence des sommes de Riemann,
  $$\frac{1}{n}\ln|P_n(r)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \ln\left|1 - 2r\cos(\theta\pi) + r^2\right| d\theta$$
  En effectuant le changement de variables $s = \theta\pi$, on obtient que la limite recherchée est
  $$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \ln\left|1 - 2r\cos(s) + r^2\right| ds = \frac{1}{2\pi}\mathrm{I}(r).$$

Conclusion. Ainsi,

- si $|r| < 1$, $\dfrac{1}{2\pi}\mathrm{I}(r) = 0$.
- si $|r| > 1$, $\dfrac{1}{2\pi}\mathrm{I}(r) = 2\ln|r|$, donc $\mathrm{I}(r) = 4\pi\ln|r|$.

B. Une formule pour $M(P)$

5. Soit $(t, r) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer $\left|e^{it} - r\right|$ en fonction de r et $\cos(t)$.

Correction. C'est un calcul direct

$$\begin{aligned}|e^{it}-r| &= |\cos(t)+i\sin(t)-r|\\ &= \sqrt{(\cos(t)-r)^2+\sin(t)^2}\\ &= \sqrt{\cos(t)^2-2r\cos(t)+r^2+\sin(t)^2}\\ &= \sqrt{1-2r\cos(t)+r^2}.\end{aligned}$$

Tiens, nous avons déjà vu cette expression quelque part...

6. Soit $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{U}$, $Q_\alpha = X-\alpha$ et $R_\alpha = X-|\alpha|$. Montrer que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|Q_\alpha\left(e^{it}\right)\right|dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|R_\alpha\left(e^{it}\right)\right|dt.$$

Correction. On écrit $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|Q_\alpha\left(e^{it}\right)\right|dt &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|e^{it}-\alpha\right|dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|e^{it}-e^{i\theta}|\alpha|\right|dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|e^{it}-e^{i\theta}|\alpha|\right|dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|e^{i(t-\theta)}-|\alpha|\right|dt\\ &=_{s=t-\theta} \frac{1}{2\pi}\int_{-\theta}^{2\pi-\theta}\ln\left|e^{is}-|\alpha|\right|dt\end{aligned}$$

Mais $s\mapsto \ln\left|e^{is}-|\alpha|\right|$ est 2π-périodique, donc son intégrale sur une période est toujours égale à l'intégrale sur $[0,2\pi]$. Ainsi,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|Q\left(e^{it}\right)\right|dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|e^{is}-|\alpha|\right|dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|R_{|\alpha|}\left(e^{it}\right)\right|dt$$

7. Montrer que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|Q_\alpha\left(e^{it}\right)\right|dt = \begin{cases}0 & \text{si } |\alpha|<1\\ \ln|\alpha| & \text{si } |\alpha|>1\end{cases}$$

Correction. On en déduit que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|Q_\alpha\left(e^{it}\right)\right|dt &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|R_\alpha\left(e^{it}\right)\right|dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|e^{is}-|\alpha|\right|dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\sqrt{1-2|\alpha|\cos(s)+|\alpha|^2}dt\\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\ln(1-2|\alpha|\cos(s)+|\alpha|^2)dt = \frac{1}{4\pi}\mathrm{I}(|\alpha|) = \begin{cases}0 & \text{si } |\alpha|<1\\ \ln|\alpha| & \text{si } |\alpha|>1\end{cases}\end{aligned}$$

d'après le résultat de la première partie !

8. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ sans racines de module 1, $P = a_d \prod_{k=1}^{d}(X - r_k)$ avec $(r_1, \ldots, r_d)$ ses racines comptées avec multiplicité. Montrer que

$$\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|P\left(e^{it}\right)\right| dt\right) = M(P)$$

Correction. On écrit que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|P\left(e^{it}\right)\right| dt &= \ln|a_d| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\prod_{k=1}^{d} e^{it} - r_k\right| dt \\ &= \ln|a_d| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\prod_{k=1}^{d} e^{it} - r_k\right| dt \\ &= \ln|a_d| + \sum_{k=1}^{d}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|e^{it} - r_k\right| dt.\end{aligned}$$

Mais $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|e^{it} - r_k\right| dt$ vaut 0 si $|r_k| < 1$ et $\ln|r_k|$ si $|r_k| > 1$. Ainsi,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|P\left(e^{it}\right)\right| dt = \ln|a_d| + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant d \\ |r_k|>1}} \ln|r_k|.$$

Donc

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|P\left(e^{it}\right)\right| dt\right) &= |a_d| \times \prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant d \\ |r_k|>1}} |r_k| \\ &= |a_d| \prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant d \\ |r_k|>1}} \max(1, |r_k|) \\ &= |a_d| \prod_{1\leqslant k\leqslant d} \max(1, |r_k|) \text{ (on a juste multiplié par des 1... !)} \\ &= M(P)\end{aligned}$$

C. Établissement de l'inégalité

9. On admettra que la convexité de la fonction exp permet d'établir l'inégalité suivante

$$\forall (a_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n \quad \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \exp a_i$$

En déduire l'inégalité de Jensen suivante : si $u \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, alors

$$\exp\left(\int_0^1 u(t)dt\right) \leqslant \int_0^1 \exp(u(t))dt.$$

On utilisera des sommes de Riemmann.

Correction. On a fait cette question en cours ! Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par inégalité de Jensen et convexité de l'exponentielle,

$$\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u\left(\frac{k}{n}\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\exp\left(u\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

Par théorème de convergence des sommes de Riemann, et comme u et exp sont continues, on en déduit l'inégalité désirée.

10. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. Exprimer $\displaystyle\int_0^1 \left|\sum_{k=0}^{d} a_k e^{2i\pi kt}\right|^2 dt$ en fonction des $|a_k|$.

Correction. Calculons ! (encore...)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left|\sum_{k=0}^{d} a_k e^{2i\pi kt}\right|^2 dt &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{d} a_k e^{2i\pi kt}\overline{\sum_{k=0}^{d} a_k e^{2i\pi kt}} dt\\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{d}\sum_{\ell=0}^{d} a_k\overline{a_\ell}\mathrm{e}^{2i(k-\ell)\pi t}dt\\ &= \sum_{k=0}^{d}\sum_{\ell=0}^{d} a_k\overline{a_\ell}\int_0^1 \mathrm{e}^{2i(k-\ell)\pi t}dt.\end{aligned}$$

Mais $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2i(k-\ell)\pi t}dt = 0$, sauf si $k = \ell$. Dans ce cas, l'intégrale vaut 1. Ainsi, on ne garde que les termes pour lesquels $k = \ell$, et

$$\boxed{\int_0^1 \left|\sum_{k=0}^{d} a_k e^{2i\pi kt}\right|^2 dt = \sum_{k=0}^{d} |a_k|^2.}$$

11. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré d sans racine de module 1 , on a

$$M(P) \leqslant \sqrt{\int_0^1 |P(\mathrm{e}^{2i\pi t})|^2 dt} \leqslant \sqrt{d+1}N(P)$$

Correction. On rassemble tout ! On sait que

$$\begin{aligned}M(P) &= \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|P\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right| dt\right)\\ &= \exp\left(\int_0^1 \ln\left|P\left(\mathrm{e}^{i2\pi t}\right)\right| dt\right) \text{ par un changement de variables } s = 2\pi t\\ &\leqslant \int_0^1 \left|P\left(\mathrm{e}^{i2\pi t}\right)\right| dt \text{ par l'inégalité de Jensen}\\ &\leqslant \sqrt{\int_0^1 \left|P\left(\mathrm{e}^{i2\pi t}\right)\right|^2 dt} \text{ par inégalité de Cauchy-Schwarz}\\ &\leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{d} |a_k|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{d} N(P)^2}\boxed{\leqslant \sqrt{d+1}N(P).}\end{aligned}$$

D'où le résultat désiré !

Prolongements. En fait, l'inégalité que l'on vient de démontrer est aussi vraie si P a des racines de module 1 (tiens, comment ferait-on ?) De plus, on sait aussi contrôler N par M : on peut démontrer (plus simplement en fait !) que $N(P) \leqslant 2^{d-1} M(P)$.