Problème 1. Racines carrées de l'endomorphisme $P \mapsto \lambda P + P'$

Soit V un espace vectoriel réel, $\mathscr{L}(V)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de V.
Si $f \in V$, on note $f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$, avec la convention $f^0 = \mathrm{Id}_V$. On note $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels et, étant donné un $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.
On note alors D l'endomorphisme de dérivation dans $\mathbb{R}[X]$; on note D_n l'endomorphisme de dérivation dans $\mathbb{R}_n[X]$

$$D : \left| \begin{array}{c} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P' \end{array} \right. \text{ et } D_n : \left| \begin{array}{c} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P' \end{array} \right. .$$

L'objectif du problème est déterminer, en fonction de la valeur du paramètre réel λ, s'il existe g un endomorphisme de E (respectivement de E_n) tel que $g^2 = \lambda \mathrm{Id}_E + D$ (respectivement $g^2 = \lambda \mathrm{Id}_{E_n} + D_n$).

A. Préliminaires

Soient V un espace vectoriel réel et f un endomorphisme de V.

1. Démontrer que la suite des noyaux des endomorphismes $f^k, k = 0, 1, 2, \ldots$ est une suite croissante de sous-espaces vectoriels emboîtés :

$$\ker(f^0) \subset \ker(f^1) \subset \ker(f^2) \subset \ldots \subset \ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1}) \subset \ldots$$

On l'appelle *suite des noyaux itérés*.

Correction. Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \ker(f^k)$. Alors $f^k(x) = 0$ donc $f^{k+1}(x) = 0$. Donc $x \in \ker(f^{k+1})$. D'où la croissance de la suite.

2. Démontrer que, s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$, alors : $\forall q \geqslant p,\ \ker(f^q) = \ker(f^{q+1})$.
En déduire que pour tout entier $k \geqslant p$, $\ker(f^k) = \ker(f^p)$.
En déduire que, si l'espace vectoriel V est de dimension finie n, la suite des dimensions des noyaux des endomorphismes f^k est constante à partir d'un rang $p \leqslant n$. En particulier les noyaux $\ker(f^n), \ker(f^{n+1})$ sont égaux.

Correction.

- Déjà, on suppose qu'il existe p tel que $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$. Soit $q \geqslant p$. Alors

$$\begin{aligned}\ker(f^q) &= \{x \in E,\ f^q(x) = 0\} \\ &= \{x \in E,\ f^p(f^{q-p}(x)) = 0\} \\ &= \{x \in E,\ f^{q-p}(x) \in \ker(f^p)\} \\ &= \{x \in E,\ f^{q-p}(x) \in \ker(f^{p+1})\} \\ &= \{x \in E,\ f^{p+1}(f^{q-p}(x)) = 0\}\end{aligned}$$
$$= \{x \in E,\ f^{q+1}(x) = 0\} = \ker(f^{q+1}).$$

  Ainsi, $\ker(f^q) = \ker(f^{q+1})$.
- Par récurrence immédiate, comme la suite $(f^q)_{q \geqslant p}$ est constante, on en déduit que pour tout $q \geqslant p$, $\ker(f^q) = \ker(f^p)$.
- Si $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$, on remarque qu'alors la suite $(\dim(\ker(f^q)))_{q \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante tant qu'elle n'est pas constante. Comme elle est majorée, elle est constante à partir d'un certain rang p. Mais comme

$$0 = \dim(\ker(f^0)) < \dim(\ker(f)) < \dim(\ker(f^2)) < \cdots < \dim(\ker(f^p)) = \dim(\ker(f^{p+1})),$$

on en déduit que $\dim(\ker(f^p)) \geqslant p$. Comme $\ker(f^p) \subset V$, de dimension n, $\boxed{p \leqslant n}$.

3. Démontrer que, si $u \in \mathscr{L}(V)$, s'il existe $q \geqslant 1$ tel que $u^q = 0_{\mathscr{L}(V)}$, alors $u^n = 0_{\mathscr{L}(V)}$.

Correction. C'est une conséquence de la question précédente. S'il existe $q \geqslant 1$ tel que $u^q = 0$, alors $\ker(u^q) = V$. Donc comme $(\ker(u^q))_{q\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang $p \leqslant n$, elle est constante égale à V à partir d'un certain rang $p \leqslant n$. On en déduit que $\boxed{\ker(u^n) = \ker(u^q) = V}$, c'est-à-dire que $\boxed{u^n = 0}$.

L'endomorphisme u est dit nilpotent.

4. Vérifier que, si $n \in \mathbb{N}$, D_n est nilpotent. Expliciter la suite des noyaux itérés $(\ker(D_n^\ell))_{0\leqslant \ell\leqslant n+1}$.

Correction. Si $n \in \mathbb{N}$, si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, $P^{(n+1)} = 0$, donc D_n est nilpotent.
Si $k \in [\![0, n+1]\!]$,

$$\ker(D_n^\ell) = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P^{(\ell)} = 0_{\mathbb{R}_n[X]}\} = \boxed{\mathbb{R}_\ell[X]}.$$

5. Soit P un polynôme de degré n. Démontrer que $(P, D(P), D^2(P), \dots, D^n(P))$ est une base de E_n.

Correction. On remarque que $\deg(P) = n$, $\deg(D(P)) = n-1, \dots, \deg(D^n(P)) = 0$. Ainsi, la famille $(P_0, \dots, P_n) = (D^n(P), D^{n-1}(P), \dots, D(P), P)$ est une famille de $n+1$ polynômes tels que $\deg(P_k) = k$, donc c'est une base de $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

B. Premiers résultats

Le but de cette partie est d'établir des propriétés des endomorphismes g recherchés et de donner un exemple. On note toujours $E = \mathbb{R}[X]$ et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

B-I. Une caractérisation des sous-espaces vectoriels stables par g

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$. Démontrer que, s'il existe $g \in \mathscr{L}(E_n)$ tel que $g^2 = \lambda \mathrm{Id}_{E_n} + D_n$, alors g commute avec D_n.
En déduire que E_p est **stable** par g, i.e. pour tout Q dans E_p, $g(Q) \in E_p$.
On note $g_p : \left| \begin{array}{l} E_p \to E_p \\ P \mapsto g(P) \end{array} \right.$. Démontrer la relation : $(g_p)^2 = \lambda \mathrm{Id}_{E_p} + D_p$.

Correction. Là encore, il faut distinguer par plusieurs points les différentes étapes de la question.

- On calcule

$$g \circ D_n = g \circ (g^2 - \lambda \mathrm{Id}_{E_n}) = g^3 - \lambda g = (g^2 - \lambda \mathrm{Id}_{E_n}) \circ g = D_n \circ g,$$

  donc g commute avec D_n.
- ensuite, g commute avec D_n donc avec D_n^p pour tout p, donc g stabilise le noyau de D_n^p pour tout p, donc g stabilise E_p pour tout p.

- On a alors pour tout P dans E_p,

$$g_p^2(P) = g^2(P) = \lambda P + P' = \lambda \mathrm{Id}_{E_p}(P) + D_p(P),$$

d'où l'égalité désirée.

On admet que, de même, s'il existe $g \in \mathscr{L}(E)$, tel que $g^2 = \lambda \mathrm{Id}_E + D$, alors g commute avec D ; de même pour tout n dans $\mathbb{N}$, E_n est stable par g.

Et, en notant $g_n : \left| \begin{array}{l} E_n \to E_n \\ P \mapsto g(P) \end{array} \right.$, on a encore $(g_n)^2 = \lambda \mathrm{Id}_{E_n} + D_n$.

On fixe alors g un endomorphisme de l'espace des polynômes réels $E = \mathbb{R}[X]$ tel que $g^2 = \lambda \mathrm{Id}_E + D$.

7. Soit F un sous-espace vectoriel de E, de dimension $n+1$, stable par D.
Démontrer qu'il existe un polynôme P de F de degré maximal d.
Démontrer que la famille $(P, D(P), D^2(P), \ldots, D^d(P))$ est une famille libre et dans F, puis que $d \leqslant n$.
En déduire que F est égal à $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.
Déterminer ensuite tous les sous-espaces vectoriels G de E (de dimension finie ou non) stables par D.

Correction.

- On note $(P_0, \ldots, P_{n+1})$ une base de F, et $d = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n+1} \deg(P_k)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\deg(P_0) = d$. Ainsi, tout polynôme étant combinaison linéaire de $P_0, \ldots, P_{n+1}$, $F \subset \mathbb{R}_d[X]$. Donc P_0 est un polynôme de F de degré d, maximal.
- La famille $(P, D(P), D^2(P), \ldots, D^d(P))$ est alors une famille de $d+1$ polynômes à degrés échelonnés, dans F, donc $d + 1 \leqslant \dim(F) = n+1$. Donc $F \subset \mathbb{R}_n[X]$. Comme ces deux espaces sont de même dimension, $F = \mathbb{R}_n[X]$.
- On en déduit que si G est un sous-espace vectoriel de E stable par D,
  — ou bien G est de dimension finie et alors $G = \mathbb{R}_n[X]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$,
  — ou bien G n'est pas de dimension finie. Alors si $n \in \mathbb{N}$, il existe P un polynôme de G de degré $m \geqslant n$. Ainsi, par le même argument que précédemment, $(P, D(P), \ldots, D^m(P))$ est une famille de $m+1$ polynômes tels que $\deg(P) = m$, $\deg(D(P)) = m-1$, ..., $\deg(D^m(P)) = 0$. Cette famille est donc dans G (par stabilité) et, en même temps, est une base de $\mathbb{R}_m[X]$. Donc $\mathbb{R}_m[X] \subset G$. Donc $\mathbb{R}_n[X] \subset G$.
  Ainsi, G contient tous les $\mathbb{R}_n[X]$ pour $n \in \mathbb{N}$, donc $G = \mathbb{R}[X]$.

8. Démontrer que, pour qu'un sous-espace vectoriel G de E soit stable par g, il faut et il suffit qu'il soit stable par D.

Correction. Soit G un sous-espace vectoriel de E. Raisonnons par double implication.

$\Rightarrow$ Supposons que G soit stable par $g = \lambda \mathrm{Id}_E + D$. Alors si $P \in G$,

$$D(P) = (g - \lambda \mathrm{Id}_E)(P) = g(P) - \lambda P.$$

Or, $g(P) \in G$ et $P \in G$, donc, comme G est un sous-espace vectoriel, $g(P) - \lambda P \in G$. Ainsi, $D(P)$ est dans G. Donc G est stable par D.

$\Leftarrow$ Supposons que G soit stable par D. Alors si $P \in G$,

$$g(P) = (D + \lambda \mathrm{Id}_E)(P) = D(P) + \lambda P.$$

Or, $D(P) \in G$ et $P \in G$, donc, comme G est un sous-espace vectoriel, $D(P) + \lambda P \in G$. Ainsi, $g(P)$ est dans G. Donc G est stable par g.

D'où l'équivalence souhaitée.

B-II. Une application immédiate : le cas $\lambda < 0$

9. Démontrer que s'il existe $g \in \mathscr{L}(E_0)$ tel que $g^2 = \lambda \mathrm{Id}_{E_0} + D_0$, alors $\lambda \geqslant 0$.

Correction. On remarque que pour tout P dans E_0, P est constant ! Alors $g^2 = \lambda \mathrm{Id}_{E_0}$. Ainsi, $g^2(1) = \lambda$. Mais si on note $g(1) = c \in \mathbb{R}$, alors $g^2(1) = g(c) = cg(1) = c^2$. Donc $c^2 = \lambda$, donc $\lambda \geqslant 0$.

10. Soit $\lambda < 0$. Déduire des résultats précédents les deux propriétés :

- Il n'existe pas d'endomorphisme g de E vérifiant $g^2 = \lambda \mathrm{Id}_E + D$.

Correction. S'il existait un tel endomorphisme g, alors g stabiliserait tous les sous-espaces vectoriels stables par D, en particulier il stabilise E_0.
Mais alors $g_0^2 = \lambda \mathrm{Id}_{E_0} + D_0$. Par la question précédente, $\lambda \geqslant 0$, absurde !
Donc un tel g n'existe pas.

- Il n'existe pas d'endomorphisme g de E_n vérifiant $g^2 = \lambda \mathrm{Id}_{E_n} + D_n$.

Correction. On adapte le résultat de la question précédente.

B-III. Un exemple pour $n = 2$

11. Soit $h \in \mathscr{L}(E_2)$. Démontrer que h commute avec D_2 si et seulement s'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $h = a\mathrm{Id}_{E_2} + bD_2 + c\,(D_2)^2$. *On pourra utiliser la question 5.*

Correction. Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Leftarrow}$ Déjà, s'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $h = a\mathrm{Id}_{E_2} + bD_2 + c\,(D_2)^2$, on en déduit que

$$D_2 \circ h = D_2 \circ (a\mathrm{Id}_{E_2} + bD_2 + c\,(D_2)^2) = aD_2 + bD_2^2 + cD_2^3 = (a\mathrm{Id}_{E_2} + bD_2 + c\,(D_2)^2) \circ D_2.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Réciproquement (et c'est le sens le plus difficile !) si h commute avec D_2, on considère P un polynôme de degré 2. Alors $(D_2^2(P), D_2(P), P)$ est une base de E_2. Décomposons $h(P)$ sur la base considérée :

$$h(P) = aP + bD_2(P) + cD_2^2(P).$$

On montre alors que $h = a\mathrm{Id}_{E_2} + bD_2 + c\,(D_2)^2$, en vérifiant l'égalité sur une base de E_2. L'égalité est vraie en P et, par commutation,

$$h(D_2(P)) = D_2(h(P)) = D_2(aP+bD_2(P)+cD_2^2(P)) = aD_2(P)+bD_2(D_2(P))+cD_2^2(D_2(P)),$$

et on a la même chose sur $D_2^2(P)$. Les deux applications coïncident sur une base, elles sont donc égales.

12. Démontrer que $(\mathrm{Id}_{E_2}, D_2, (D_2)^2)$ est une famille libre de $\mathscr{L}(E_2)$. En déduire que si $\lambda > 0$, il existe exactement deux $g \in \mathscr{L}(E_2)$ tels que $g^2 = \lambda \mathrm{Id}_{E_2} + D_2$.

Correction. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $a\mathrm{Id}_{E_2} + bD_2 + c\,(D_2)^2 = 0_{\mathscr{L}(E_2)}$. Alors en évaluant l'égalité en $D_2^2(P)$ (avec P comme ci-dessus), on a $a = 0$, puis en évaluant en $D_2(P)$, on a $b = 0$, puis en évaluant en P, on a $c = 0$. Donc la famille est libre.
Soit maintenant $g \in \mathscr{L}(E_2)$.

- **Analyse.** Si $g^2 = \lambda \mathrm{Id}_{E_2} + D_2$, alors g commute avec D_2, donc on dispose de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $g = a\mathrm{Id}_{E_2} + bD_2 + c\,(D_2)^2$. Ainsi,
$$g^2 = a^2\mathrm{Id}_{E_2} + abD_2 + (ac + b^2)D_2^2$$
(tous les autres termes sont nuls car $D_2^3 = 0$). Par liberté de la famille $(\mathrm{Id}_{E_2}, D_2, (D_2)^2)$, on en déduit que $a^2 = \pm\sqrt{\lambda}$, $b = 0$ et $c = \pm\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$.
- **Synthèse.** Réciproquement, de telles solutions fonctionnent.

C. Cas $\lambda = 0$

L'objet de cette partie est d'étudier le cas où le réel λ est nul, et d'étendre le résultat à une situation plus générale. Dans cette partie l'entier n est supposé donné supérieur ou égal à 1.

13. Montrer que, s'il existe $g \in \mathscr{L}(E_n)$ tel que $g^2 = D_n$, alors g est nilpotent et $\dim\ker g^2 \geqslant 2$.

Correction. Déjà, $g^{2n+2} = D_n^{n+1} = 0_{\mathscr{L}(E_n)}$ donc g est nilpotent. Donc $\ker(g) \neq 0$, donc $\dim(\ker(g)) \geqslant 1$. Par stricte inclusion des noyaux, $\dim(\ker(g^2)) \geqslant 2$.

14. En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de E_n tel que $g^2 = D_n$, puis qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de $E = \mathbb{R}[X]$ tel que $g^2 = D$.

Correction. S'il existait un tel endomorphisme, alors $\dim(\ker(g^2)) \geqslant 2$, ce qui est absurde car $\dim(\ker(D_n)) = 1$...
On fait pareil avec D, en disant que D stabilise $\mathbb{R}_n[X]$ avec $n \geqslant 1$.

D. Existence dans le cas $\lambda > 0$

15. Justifier qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$.

Donner les valeurs de a_0, a_1, a_2, et démontrer que pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $a_k = \dfrac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)2^{2k-1}}\dbinom{2k-1}{k}$.

Correction. On sait que $\sqrt{1+x}$ admet un développement limité à tout ordre en 0, et que son développement limité est
$$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2 + \dots$$

Le coefficient devant x^n est donc

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-k\right)\\
&= \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1-2k}{2}\\
&= \frac{1}{2^n n!}\prod_{k=0}^{n-1}(1-2k)\\
&= \frac{1}{2^n n!}\prod_{k=1}^{n-1}(1-2k)\\
&= \frac{(-1)^n}{2^n n!}\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)\\
&= \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1\times 3\times\cdots\times(2n-1))\\
&= \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{(2n-1)!}{2\times 4\times\cdots\times(2n-2)}\\
&= \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}\\
&= \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\binom{2n-1}{n},
\end{aligned}$$

d'où le résultat désiré !

16. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = \begin{cases} 1 \text{ si } n \leqslant 1 \\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}$

Correction. On peux y aller « de manière bourrine », mais je vais donner un joli argument à la place. On multiplie par lui-même le développement limité à l'ordre n, et l'on tronque à l'ordre n. On obtient

$$1+x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + o(x^n).$$

Mais c_k est le produit de Cauchy $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_i a_{k-i}$! (produit de deux polynômes) Ainsi, par unicité du développement limité, $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_i a_{k-i} = 1$ si $k=0$ ou $k=1$ et 0 sinon !

On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on note $h_n = a_0 \mathrm{Id}_{E_n} + a_1 D_n + a_2 D_n^2 + \cdots + a_n D_n^n$.

17. Démontrer que $h_n^2 = \mathrm{Id}_{E_n} + D_n$.

Correction. *Bis repetita placent...*
On calcule

$$h_n^2 = (a_0\mathrm{Id}_{E_n} + a_1 D_n + a_2 D_n^2 + \cdots + a_n D_n^n)\circ(a_0\mathrm{Id}_{E_n} + a_1 D_n + a_2 D_n^2 + \cdots + a_n D_n^n)$$

Lorsqu'on développe ce produit, les termes D_n^k avec $k \geqslant n+1$ s'annulent. Il nous reste donc simplement

$$h_n^2 = \sum_{k=0}^{n} c_k D_n^k,$$

avec c_k le produit de Cauchy de la question précédente ! Ainsi, on obtient $h_n^2 = \mathrm{Id}_{E_n} + D_n$!

18. En déduire un élément g_n dans $\mathscr{L}(E_n)$ tel que $g_n^2 = \lambda \mathrm{Id}_{E_n} + D_n$, puis un élément g de E tel que $g^2 = \lambda \mathrm{Id}_E + D$.

Correction.

- On écrit que
$$\lambda \mathrm{Id}_{E_n} + D_n = \lambda \left(\mathrm{Id}_{E_n} + \frac{1}{\lambda} D_n \right).$$
En posant
$$g_n = \sqrt{\lambda} \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{1}{\lambda} D_n \right)^k,$$
on a le résultat désiré !
- Enfin, en définissant, pour tout P dans E,
$$g(P) = \sqrt{\lambda} \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k \left(\frac{1}{\lambda} D_n \right)^k (P),$$
on définit une application linéaire de E dans E telle que $g^2 = D$.