MPSI1 – Programme de colles – Semaine 26 – du 4 au 7 mai 2026

Organisation de la colle. Cours et exos de probabilités.
Exemples de questions de cours

1. Vocabulaire de probabilités (def, probas composées, totales).
2. Une somme de n vaiid de Bernoulli suit une loi binomiale.
3. Lien entre loi jointe et marginales (récupération des marginales en connaissant la loi jointe ; détermination de la loi jointe à l'aide des marginales **en cas d'indépendance**)
4. Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp f(Y)$.
5. Linéarité de l'espérance.
6. Formule de transfert.
7. Espérance d'une binomiale, d'une uniforme.
8. Définitions de la variance, $V(aX+b)$.
9. Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, $V(X+Y)$. De manière générale, expression à l'aide de la covariance.
10. Variance d'une variable uniforme sur $[\![1,n]\!]$, d'une variable de Bernoulli.
11. Variance et indépendance, application au calcul de la variance d'une binomiale.
12. Inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'espérance. Cas d'égalité.
13. Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebycheff.
14. Inégalité préparatoire à la loi faible des grands nombres : si $X_1,\dots,X_n$ sont n vaiid d'espérance commune m, alors pour tout $\varepsilon>0$, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1+\dots+X_n}{n}-m\right|\right) \leq \frac{\mathbb{V}(X_1)}{n\varepsilon^2}$

Probabilités

A - Probabilités sur un univers fini, variables aléatoires et lois

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Univers, événements, variables aléatoires	
Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités.	On se limite au cas d'un univers fini. Événement élémentaire (singleton), système complet d'événements, événements disjoints (ou incompatibles).
Une variable aléatoire X est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E.	Notations $\{X \in A\}$ et $(X \in A)$.
b) Espaces probabilisés finis	
Probabilité sur un univers fini.	Espace probabilisé fini (Ω, P). Notations $P(X\in A)$, $P(X=x)$ et $P(X \leqslant x)$.
Une distribution de probabilités sur un ensemble E est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par E et de somme 1. Une distribution de probabilités sur un ensemble fini est une famille de réels positifs indexée par cet ensemble et de somme 1. Probabilité uniforme.	Une probabilité P sur Ω est déterminée par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$.
Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance.	La formule du crible est hors programme.
c) Probabilités conditionnelles	
Si $P(B)>0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$. L'application P_B est une probabilité.	
Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.	Par convention, $P(A\|B)P(B)=0$ lorsque $P(B)=0$.
d) Loi d'une variable aléatoire	
Loi P_X d'une variable aléatoire X à valeurs dans E.	La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X=x))_{x\in E}$. On note $X \sim Y$ la relation $P_X = P_Y$.
Variable aléatoire $f(X)$.	Si $X\sim Y$ alors $f(X)\sim f(Y)$.
Variable uniforme sur un ensemble fini non vide E.	Notation $X \sim \mathscr{U}(E)$.
Variable de Bernoulli de paramètre $p\in[0,1]$.	Notation $X\sim\mathscr{B}(p)$. Interprétation comme succès d'une expérience.
Variable binomiale de paramètres $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in[0,1]$.	Notation $X\sim\mathscr{B}(n,p)$.
Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.	Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X=x, Y=y)$. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.

e) Événements indépendants

Les événements A et B sont indépendants si $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.	Si $P(B)>0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A\vert B)=P(A)$.
Famille finie d'événements indépendants. Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance. Extension au cas de n événements.

f) Variables aléatoires indépendantes

Les variables aléatoires X et Y définies sur l'univers Ω sont indépendantes si pour tout $A\in\mathscr{P}(X(\Omega))$ et tout $B\in\mathscr{P}(Y(\Omega))$, les événements $(X\in A)$ et $(Y\in B)$ sont indépendants. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.	Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. Cette condition équivaut au fait que la distribution de probabilités de (X,Y) est donnée par $P\big((X,Y)=(x,y)\big)=P(X=x)P(Y=y)$. Modélisation de n expériences aléatoires indépendantes par une suite finie $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de variables aléatoires indépendantes.
Si $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$, alors $X_1+\cdots+X_n$ suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$.	Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de n expériences indépendantes ayant chacune la probabilité p de succès.
Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.	
Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1,\dots,X_m)$ et $g(X_{m+1},\dots,X_n)$ le sont aussi.	Extension au cas de plus de deux coalitions.

B - Espérance et variance

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe	
Espérance $\mathrm{E}(X)=\sum\limits_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)$ d'une variable aléatoire X.	L'espérance est un indicateur de position. Formule $\mathrm{E}(X)=\sum\limits_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$. Variable aléatoire centrée.
Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire. Espérance d'une variable constante, de Bernoulli, binomiale. Formule de transfert : $\mathrm{E}\big(f(X)\big)=\sum\limits_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X=x)$.	Exemple : $\mathrm{E}(\mathbb{1}_A)=P(A)$. On souligne que la formule de transfert s'applique en particulier aux couples et aux n-uplets.
Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{E}(XY)=\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$.	Extension au cas de n variables aléatoires indépendantes.
b) Variance d'une variable aléatoire réelle, écart type et covariance	
Variance et écart type d'une variable aléatoire réelle.	Variance et écart type sont des indicateurs de dispersion. Variable aléatoire réduite.
Relation $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$.	Si $\sigma(X)>0$, la variable $\dfrac{X-\mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Relation $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2$. Variance d'une variable de Bernoulli, d'une variable binomiale.	
Covariance de deux variables aléatoires.	Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle sont dites décorrélées.
Relation $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$, cas de deux variables indépendantes.	
Variance d'une somme, cas de variables décorrélées.	On retrouve la variance d'une variable binomiale.
c) Inégalités probabilistes	
Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	Application à l'obtention d'inégalités de concentration. Application à une moyenne de variables indépendantes de même loi, interprétation fréquentiste.