

TD 23 Fractions rationnelles

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. Déterminer les $F \in \mathbb{C}(X)$ telles que $F(X+1) = F(X)$.

Exercice 2. *Quelques calculs.*

1. Effectuer la décomposition en éléments simples de $\frac{2X^3 + X^2 - X + 1}{X^2 - 3X + 2}$

2. Calculer $\int_2^3 \frac{2x^3 + 2}{x^2 + 2x - 3} dx$

Exercice 3. Déterminer la décomposition en éléments simples...

1. ... de $\frac{X^n - 1}{X^n + 1}$ et $\frac{1}{(X-1)(X^n-1)}$ sur \mathbb{C} .

2. ... de $\frac{X^{2n}}{(X^2+1)^n}$ sur \mathbb{R} .

3. ... de $\left(\frac{1}{X^n-1}\right)'$, et de $\frac{1}{(X^n-1)^2}$ sur \mathbb{C} .

Exercice 4. Soit $n \geq 1$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$, et décomposer $\frac{1}{T_n}$ en éléments simples.

2 Exercices faits en TD

Exercice 5. ●○○ – ●●○ Déterminer la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} des fractions rationnelles suivantes.

1. $\frac{X^3 - 3X^2 + X - 3}{X-1}$

2. $\frac{X}{X^2-4}$

3. $\frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$

4. $\frac{1}{X(X-1)^2}$

5. $\frac{3X-1}{X^2(X+1)^2}$

6. $\frac{2X}{(X+1)(X^2+1)}$

7. $\frac{1}{X^4+X^2+1}$

Exercice 6. ●●○ Déterminer les limites des suites suivantes

1. $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

2. $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

3. $\left(\sum_{k=1}^n \frac{k+3}{k^3+3k^2+2k}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

4. $\left(\sum_{k=0}^n \frac{k}{k^4+k^2+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

Exercice 7. ●○○ – ●●○ Calculer les intégrales suivantes

1. $\int_0^1 \frac{1}{x^2+2} dx$

2. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2} dx$

3. $\int_0^1 \frac{x}{x^4-16} dx$

4. $\int^y \frac{1}{x(1+x^2)^2} dx$

Exercice 8. ●●○ – ●●● Calculer les primitives des fonctions suivantes, en précisant les intervalles de validité

1. $f_1 : x \mapsto \frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}$

2. $f_2 : x \mapsto \frac{\sin^3(x)}{1 + \cos(x)}$

3. $f_3 : x \mapsto \frac{\cos(x)}{1 + \sin(2x)}$

4. $f_4 : x \mapsto \frac{1}{\cos^4(x) + \sin^4(x)}$

5. $f_5 : x \mapsto \frac{\tan(x) - \tan(a)}{\tan(x) + \tan(a)}, a \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

Exercice 9. ●●○ Soit P un polynôme réel scindé à racines simples, a un réel. Montrer que $P' + aP$ est scindé à racines simples sur \mathbb{R} . On pourra utiliser la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.

Exercice 10. ●●○ Soit P un polynôme scindé à racines simples, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ses racines. On suppose que $P(0) \neq 0$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i P'(\alpha_i)} = -\frac{1}{P(0)}$$

Exercice 11. ●●○ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré $n \geq 1$. On note $Q = X(X-1)\cdots(X-n)$.

1. Montrer $\frac{P}{Q} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{n!} \binom{n}{k} P(k) \frac{1}{X-k}$.

2. En déduire $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(k) = n!$.

3. En déduire $\max \{|P(k)| \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\} \geq \frac{n!}{2^n}$.