N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Chapitre 20
Espaces vectoriels de dimension finie

1 Dimension finie

Définition 1

Dans tout ce chapitre, lorsqu'on parle du **cardinal** d'une famille, on parle du **cardinal de l'ensemble sur lequel elle est indexée.**

1.1 Existence de bases – notion de dimension

Définition 2

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On dit que E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.
On abrège en « E est un $\mathbb{K}$-evdf ».

Proposition 3

Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

1. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, toute famille à $n+1$ éléments de $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est liée.
2. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, toute famille de $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ avec au moins $n+1$ éléments est liée.
3. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, toute famille libre de $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est libre.

Théorème 4

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice finie de E, $\mathscr{L}$ une famille libre de E telle que $\mathscr{L} \subset \mathcal{G}$, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathscr{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.
2. (Théorème de la base incomplète) Si $\mathscr{L} = (e_1, \dots, e_p)$ est une famille libre de E, alors il existe $(e_{p+1}, \dots, e_n) \in E$ tels que $(e_1, \dots, e_n)$ soit une base de E.
3. (Théorème de la base extraite) Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E, on peut extraire de $\mathcal{G}$ une base de E.
4. E admet une base.

Proposition 5

Soit E un evdf non réduit à $\{0\}$. Alors toutes les bases ont même cardinal.

Définition 6

Soit E un evdf. La dimension de E, notée $\dim(E)$, est le cardinal de toute base de E. Par convention, $\dim\{0\} = 0$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Corollaire 7

Soit E un ev de dimension n. Alors

1. Toute famille libre est de cardinal $\leqslant n$.
2. Toute famille génératrice est de cardinal $\geqslant n$.
3. Si $\mathcal{F}$ est une famille de cardinal n de E, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{F}$ est libre **(i)** $\mathcal{F}$ est génératrice **(iii)** $\mathcal{F}$ est une base

Définition 8

On dit que deux sous-espaces vectoriels E et F sont isomorphes s'il existe $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ bijective.

Proposition 9

Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension.

Proposition 10

Soient $E_1, \dots, E_n$ n evdf. Alors $\dim(E_1 \times \dots \times E_n) = \dim(E_1) + \dots + \dim(E_n)$.

1.2 Sous-espaces et dimension

Proposition 11

Soit E un evdf, F un sev de E. Alors F est de df et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.

Proposition 12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, F un sous-espace vectoriel de E.

1. $\dim(F) = 0 \Leftrightarrow F = \{0_E\}$.
2. $\dim(F) = n \Leftrightarrow F = E$.

Proposition 13

Soit E un $\mathbb{K}$-evdf, F et G deux sev de E.

1. Si $F \cap G = \{0_E\}$, $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$,
2. Si F est G sont supplémentaires, $\dim(F \oplus G) = \dim(E)$,
3. F admet un supplémentaire,
4. (formule de Grassmann) $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Proposition 14

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sev de E. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $F + G = E$ et $F \cap G = \{0\}$ (i.e. $F \oplus G = E$)

(ii) $F + G = E$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

(iii) $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

1.3 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 15

Soit E un espace vectoriel quelconque, $(u_1, \dots, u_r)$ r vecteurs de E. Le rang de $(u_1, \dots, u_r)$ est la dimension de $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_r)$.

Proposition 16

Soient n et p deux entiers naturels, E un $\mathbb{K}$-evdf n, $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E.

1. $(x_1, \dots, x_p)$ est libre si et seulement si $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) = p$,
2. $(x_1, \dots, x_p)$ est génératrice si et seulement si $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) = n$,
3. $(x_1, \dots, x_p)$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) = n = p$.

2 Applications linéaires en dimension finie

2.1 Dimension de $\mathscr{L}(E, F)$

Proposition 17

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\mathscr{L}(E, F)$ est de dimension finie et $\dim(\mathscr{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.

2.2 Théorème du rang

Définition 18

Soient E et F deux evdf, $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Le rang de u, noté $\mathrm{rg}(u)$, est la dimension de l'image de u.

Proposition 19

Soient E et F deux evdf, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors

$$\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(\mathrm{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \mathrm{rg}(u(e_1), \dots, u(e_n)).$$

Définition 20

On appelle rang d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ le rang de l'application linéaire canoniquement associée à A. On a alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_p)$ où $(C_1, \dots, C_p)$ sont les colonnes de A.

Théorème 21 (Théorème du rang)

Soient E et F deux evdf, $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors

$$\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \mathrm{rg}(u).$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Proposition 22

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, **de même dimension**, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alos les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) u est injective.

(ii) u est surjective.

(iii) u est bijective.

Proposition 23

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-evdf, $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $v \in \mathscr{L}(F, G)$.

1. $\mathrm{rg}(u) \leqslant \min(\dim(E), \dim(F))$,
2. $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$,
3. si v est un isomorphisme, $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(u)$; si u est un isomorphisme, $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(v)$.

2.3 Formes linéaires et hyperplans

Proposition 24

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, H un sous-espace vectoriel de E.
Alors H est un hyperplan de E si, et seulement si $\dim(H) = n - 1$.

Proposition 25

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Si H est un hyperplan, et F un sous-espace vectoriel de E, $\dim(H \cap F) = \begin{cases} \dim(F) \text{ si } F \subset H, \\ \dim(F) - 1 \text{ sinon.} \end{cases}$
2. si $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ sont p formes linéaires sur E, alors
$$\dim\left(\bigcap_{k=1}^{p} \ker(\varphi_k)\right) \geqslant n - p.$$
3. Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - p$, alors on dispose de $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ p formes linéaires telles que $F = \bigcap_{k=1}^{p} \ker(\varphi_k)$.