

Chapitre 22 – Probabilités

1 Notions de probabilités

1.1 Définitions

Définition 1

Soit Ω un ensemble, appelé univers. Les éléments de Ω sont appelés *réalisations*, *résultats* ou événements élémentaires, les éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ (i.e. les parties de Ω) sont appelés événements ou évènements.

Définition 2

Soit Ω un univers, A et B deux événements.

1. L'événement A et B est défini par l'intersection $A \cap B$.
2. L'événement A ou B est défini par la réunion $A \cup B$.
3. L'événement contraire de A , \bar{A} est défini par le complémentaire de A dans Ω .
4. On dit que deux événements A et B sont incompatibles s'ils sont disjoints, i.e. si $A \cap B = \emptyset$. On note alors $A \cup B = A \sqcup B$.
5. On appelle système complet d'événements (parfois abrégé en s.c.e) toute collection d'événements (A_1, \dots, A_n) , deux à deux disjoints, tels que $A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n = \Omega$.

Proposition 3 (Décomposition sur un système complet d'événements)

Soit Ω un univers, (A_1, \dots, A_r) un système complet d'événements de Ω .

Pour tout B dans Ω , $B = \bigsqcup_{k=1}^r (A_k \cap B)$.

Définition 4

1. Soit Ω un univers. Une variable aléatoire X sur Ω à valeurs dans E est une application de Ω dans E .
2. Si X est une variable aléatoire à valeurs dans E , si $f : E \rightarrow F$, $f(X) : \omega \mapsto f(X(\omega))$ est une variable aléatoire.
3. Si $E \subset \mathbb{R}$, on dit que la variable aléatoire est réelle (on note v.a.r.)
4. Une variable aléatoire X est dite **de Bernoulli** si elle est à valeurs dans $\{0, 1\}$.
5. Si $A \subset \Omega$. La fonction indicatrice de A est une variable aléatoire sur Ω , on la note $\mathbb{1}_A$.

Définition 5

Soit Ω un univers, X une variable aléatoire à valeurs dans E .

1. Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, l'événement $\{X \in A\}$ ou $X \in A$ est défini par $\{X \in A\} = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\}$.
2. Si $A = \{a\}$, l'événement $X \in A$ est noté $X = a$.
3. On définit de même, pour une variable aléatoire réelle, et $a \in \mathbb{R}$,
 - $\{X \geq a\} = X^{-1}([a, +\infty[)$,
 - $\{X > a\} = X^{-1}(]a, +\infty[)$,
 - $\{X \leq a\} = X^{-1}(]-\infty, a])$,
 - $\{X < a\} = X^{-1}(]-\infty, a[)$,

1.2 Probabilité

Définition 6

Soit Ω un ensemble fini. Une probabilité sur Ω est une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$, telle que

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega), A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé fini. On le notera souvent, plus simplement, (Ω, \mathbb{P}) .

Dans tout le reste du chapitre, (Ω, \mathbb{P}) est un espace probabilisé fini.

Proposition 7

1. (ensemble vide) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. (complémentaire) $\forall A \subset \Omega, \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
3. (différence) $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, \mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
4. (réunion disjointe) $\forall A_1, \dots, A_n$ deux à deux disjoints, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)$. En particulier, pour tout $A \subset \Omega, \mathbb{P}(A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(\{x\})$.
5. (réunion) $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
6. (croissance) $\forall A \subset B \subset \Omega, \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
7. (sous-additivité) $\forall (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n, \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)$, avec égalité si (A_1, \dots, A_n) sont deux à deux disjoints.
8. (décomposition sur un système complet d'événements) Si (A_1, \dots, A_n) est un système complet d'événements et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, alors $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_i)$. En particulier, $\mathbb{P}(B) = \sum_{x \in B} \mathbb{P}(\{x\})$.

Définition 8

1. Un événement A est dit presque sûr s'il est de probabilité 1.
2. Un événement A est dit négligeable s'il est de probabilité nulle.
3. Deux événements A et B sont dits équiprobables si $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$.
4. On dit que \mathbb{P} est la probabilité uniforme si tous les singletons sont équiprobables, i.e. si pour tout x dans $\Omega, \mathbb{P}(\{x\}) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$.

2 Variables aléatoires

2.1 Loi d'une variable aléatoire

Proposition 9 (et def)

Soit X une v.a. sur Ω à valeurs dans E .

L'application $\mathbb{P}_X : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \rightarrow [0, 1] \\ A \mapsto \mathbb{P}(X \in A) \end{cases}$ définit une probabilité sur E , appelée loi de la variable X .

Si deux variables X et Y suivent la même loi, on note $X \sim Y$.

2.2 Lois usuelles

Définition 10 (Lois usuelles)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0, 1]$.

1. Une variable aléatoire est dite déterministe si elle est constante presque sûrement.
2. Une variable aléatoire X à valeurs dans un ensemble E fini suit la loi uniforme si pour tout x dans E , $\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{\text{Card}(E)}$. On note $X \sim \mathcal{U}(E)$.
3. Une variable aléatoire X est appelée **variable de Bernoulli** si elle est à valeurs dans $\{0, 1\}$. Si c'est le cas, on note $p = \mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$. On note alors $X \sim \mathcal{B}(p)$.
 En particulier, $\mathbb{1}_A \sim \mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$.
4. Une variable X à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ suit la loi binomiale de paramètres n et p si pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$. On note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

2.3 Couples de variables aléatoires

Définition 11

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un epf. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans E et F .

1. L'application $\begin{cases} \Omega \rightarrow E \times F \\ \omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{cases}$ définit une variable aléatoire, notée (X, Y) , de loi $\mathbb{P}_{(X, Y)}$, appelée loi jointe (ou conjointe) de X et Y .
2. Les événements élémentaires de (X, Y) sont les $\{X = x\} \cap \{Y = y\}$, notés aussi $\{(X, Y) = (x, y)\}$, ou encore $\{X = x, Y = y\}$.
 On note alors indifféremment $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ ou $\mathbb{P}((X, Y) = (x, y))$ ou $\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$.
3. La loi \mathbb{P}_X est appelée première marginale de (X, Y) , la loi \mathbb{P}_Y seconde marginale.

Proposition 12

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un epf. Soient X et Y deux variables aléatoires respectivement à valeurs dans E et F . Alors

1. pour tout x_0 dans E , $\mathbb{P}(X = x_0) = \sum_{b \in F} \mathbb{P}(X = x_0, Y = b)$,
2. pour tout y_0 dans F , $\mathbb{P}(Y = y_0) = \sum_{a \in E} \mathbb{P}(X = a, Y = y_0)$.

3 Conditionnement et indépendance

3.1 Conditionnement

Définition 13

Soit $A \subset \Omega$ de probabilité non nulle. L'application $\mathbb{P}_A : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1] \\ B \mapsto \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \end{cases}$ définit une probabilité, appelée probabilité conditionnée à l'événement A .

Si $B \subset \Omega$, on note parfois $\mathbb{P}_A(B)$ sous la forme $\mathbb{P}(B|A)$ et on dit « probabilité de B sachant A »

Proposition 14

Soit $A \subset \Omega$ de probabilité non nulle, $B \subset \Omega$. Alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)$.

Proposition 15 (Probabilités composées)

Soit (A_1, \dots, A_n) une famille d'événements telle que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) > 0$. Alors $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \mathbb{P}_{\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right)}(A_n) \times \mathbb{P}_{\left(\bigcap_{k=1}^{n-2} A_k\right)}(A_{n-1}) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}(A_1)$.

Proposition 16 (Probabilités totales)

Soit (A_1, \dots, A_n) un système complet d'événements de probabilités non nulles. Alors pour tout B dans Ω , $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}_{A_k}(B) \mathbb{P}(A_k)$.

Proposition 17 (Formule de Bayes)

Soient A et B dans Ω , de probabilités non nulles. Alors $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B) \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$.

Proposition 18 (Loi conditionnelle)

Soient E et F deux ensembles, X et Y deux v.a. sur Ω , à valeurs dans E et F .

1. Si $A \subset E$ et $B \subset F$ sont deux événements tels que $\mathbb{P}(X \in A) \neq 0$, on définit la probabilité de $\{Y \in B\}$ conditionnée à $\{X \in A\}$, notée $\mathbb{P}(Y \in B | X \in A)$ ou $\mathbb{P}_{\{X \in A\}}(Y \in B)$, par

$$\mathbb{P}_{\{X \in A\}}(Y \in B) = \frac{\mathbb{P}(X \in A, Y \in B)}{\mathbb{P}(X \in A)}.$$

On définit de même, si $\mathbb{P}(Y \in B) \neq 0$, $\mathbb{P}_{\{Y \in B\}}(X \in A)$.

2. Si $A \subset E$ est un événement tel que $\mathbb{P}(X \in A) \neq 0$, on définit alors une loi de probabilité sur F appelée loi de Y conditionnée à $\{X \in A\}$.

3.2 Indépendance

Définition 19

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

1. Deux événements A et B sont dits indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$.
 On note parfois $A \perp\!\!\!\perp B$.
2. Des événements (A_k) sont dits indépendants deux à deux si pour tout $i \neq j$, A_i et A_j sont indépendants.

Proposition 20

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, A et B dans $\mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) > 0$. Alors on a les équivalences

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \Leftrightarrow \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B) \Leftrightarrow \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B).$$

Proposition 21

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, A et B dans $\mathcal{P}(\Omega)$. Les ASSE

1. A et B sont indépendants.
2. \bar{A} et B sont indépendants.
3. A et \bar{B} sont indépendants.
4. \bar{A} et \bar{B} sont indépendants.

Définition 22

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Des événements $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont dits mutuellement indé-

pendants si pour tout $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in I} A_k\right) = \prod_{k \in I} \mathbb{P}(A_k)$.

Définition 23

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

1. Deux variables X et Y à valeurs dans E et G sont indépendantes si, pour tout $A \subset E$ et tout $B \subset G$, $\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$. On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.
2. Des variables aléatoires (X_1, \dots, X_p) à valeurs dans E_1, \dots, E_p sont mutuellement indépendantes si pour tous A_1, \dots, A_p dans E_1, \dots, E_p , on a $\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \dots, X_p \in A_p) = \prod_{k=1}^p \mathbb{P}(X_k \in A_k)$.

Proposition 24

Deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans E et F sont indépendantes si et seulement si pour tout x dans E et y dans F on a $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$.

Proposition 25 (Lemme des coalitions)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

1. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur Ω , à valeurs dans E et F (finis), alors si $\varphi : E \rightarrow G$ et $\psi : F \rightarrow H$, $\varphi(X)$ et $\psi(Y)$ sont indépendantes.
2. Si (X_1, \dots, X_n) est un n -uplet de variables aléatoires mutuellement indépendantes sur Ω , à valeurs dans E_1, \dots, E_n , alors pour tout k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, pour toute $f : E_1 \times \dots \times E_k \rightarrow F$, pour toute $g : E_{k+1} \times \dots \times E_n \rightarrow G$, alors $f(X_1, \dots, X_k)$ et $g(X_{k+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Définition 26

Des variables aléatoires à valeurs dans le même espace E sont dites i.i.d. si elles sont indépendantes et identiquement distribuées, c'est-à-dire qu'elles suivent la même loi.

Proposition 27

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, (X_1, \dots, X_n) n variables aléatoires indépendantes, suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Alors $X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$.

4 Moments d'une variable aléatoire réelle

4.1 Espérance

4.1.1 Définition et calculs

Définition 28

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire sur Ω , réelle, à valeurs dans $E \subset \mathbb{R}$, E fini, est $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in E} x\mathbb{P}(X = x)$. Une variable aléatoire d'espérance nulle est dite **centrée**.

Proposition 29 (Espérances usuelles)

Soient p un réel de $]0, 1[$, a et b deux entiers, X une v.a.r.

1. Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p , alors $\mathbb{E}(X) = p$.
2. Si A est un événement, $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.
3. Si X suit une loi uniforme sur $[[a, b]]$, alors $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$.
4. Si X suit une loi binomiale de paramètres (n, p) , alors $\mathbb{E}(X) = np$.

Proposition 30 (Lemme technique)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire sur Ω . Alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega)$.

Proposition 31

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles, a, b dans \mathbb{R} .

1. $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$.
2. si X est à valeurs positives, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
3. plus généralement, si $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$, $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
4. si X est positive presque sûrement, $\mathbb{E}(X) = 0$ si et seulement si $\mathbb{P}(X = 0) = 1$ (X est presque sûrement nulle).
5. (croissance de l'espérance) si $X \leq Y$, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$. Plus généralement, si $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$, $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.

Proposition 32 (Formule de transfert)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans E et $f : E \rightarrow F \subset \mathbb{R}$. Alors $\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in E} f(x)\mathbb{P}(X = x)$.

4.1.2 Espérance et indépendance

Proposition 33

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles, à valeurs respectives dans E et dans F , parties finies de \mathbb{R} .

Si X et Y sont indépendantes, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

4.1.3 Inégalités

Proposition 34 (Inégalité de Markov)

Soit X une v.a.r. positive, $a > 0$. Alors pour tout $a > 0$, $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$.

Proposition 35 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors $\mathbb{E}(XY)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$, avec égalité si, et seulement si X et Y sont presque sûrement colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe λ dans \mathbb{R} tel que $X = \lambda Y$ presque sûrement.

4.2 Variance et covariance

4.2.1 Variance

Définition 36

Soit X une v.a.r.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Le moment d'ordre k de X est le réel $\mathbb{E}(X^k)$, son moment d'ordre k centré est $\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^k)$.
2. La variance de X est son moment d'ordre 2 centré, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$.
3. L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.
4. Une variable centrée est dite réduite si sa variance est égale à 1.

Proposition 37 (Relation de Koenig-Huygens)

Soit X une v.a.r. Alors $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

Proposition 38 (Variances usuelles)

1. Une variable aléatoire est déterministe si et seulement si elle est de variance nulle.
2. Si $X \sim \mathcal{U}([0, n])$, $\mathbb{V}(X) = \frac{n(n+1)}{12}$ (ne pas la connaître par coeur, savoir la retrouver)
3. Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$ (à connaître par coeur).
4. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$ (à connaître par coeur).

Proposition 39

1. Soit X une v.a.r., a et b des réels. Alors $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$.
2. Soit X une v.a.r., d'espérance μ , de variance σ^2 . Alors $\frac{X - \mu}{\sigma}$ est centrée réduite.

Proposition 40

1. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes. Alors $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.
2. Soient (X_1, \dots, X_n) n v.a.r. indépendantes. Alors $\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i)$.

4.2.2 Covariance

Définition 41

Soient X et Y deux v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

1. On appelle *covariance* de X et Y le réel $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))$.
2. Deux v.a.r. de covariance nulle sont dites non corrélées.

Proposition 42

Soient X et Y deux v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

1. $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + 2\text{Cov}(X, Y) + \mathbb{V}(Y)$.
2. Plus généralement si X_1, \dots, X_n sont des v.a.r., $\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$

Proposition 43 (Variables non corrélées, indépendantes.)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

1. deux variables aléatoires réelles X et Y sur Ω sont non corrélées si, et seulement si $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.
2. si X_1, \dots, X_n sont des v.a.r. deux à deux non corrélées, $\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k)$.
3. si deux variables aléatoires réelles X et Y sur Ω sont indépendantes, alors elles sont non corrélées.

4.2.3 Inégalité pour la covariance

Proposition 44 (Inégalité de Cauchy-Schwarz pour la covariance)

Soient X et Y deux v.a.r. Alors $\text{Cov}(X, Y)^2 \leq \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$, avec égalité si et seulement si X est presque sûrement égale à une fonction affine de Y , i.e. ssi il existe α et β tels que $X = \alpha Y + \beta$ presque sûrement.

Définition 45

Soient X et Y deux v.a.r. On définit le coefficient de corrélation de X et de Y comme $\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}}$.

4.2.4 Vers la loi des grands nombres

Proposition 46 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire réelle. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$.

Proposition 47 (Résultat admis, ultra-HP, dû à Kolmogorov)

Soit X une v.a. Il existe un univers Ω (infini) sur lequel on peut construire une suite (X_k) de v.a. i.i.d.

Proposition 48 (Loi faible des grands nombres)

Soient $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. d'espérance m . Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{+\infty} 0$.