N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Chapitre 21
Équations différentielles

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Vocabulaire et principe de base

1.1 Vocabulaire

Définition 1

Une équation différentielle est une équation du type : $\forall x \in \mathrm{I},\ y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) y^{(k)}(x) = b(x)$, où

- I est un intervalle de $\mathbb{R}$,
- $n \in \mathbb{N}$ est l'ordre de l'équation différentielle,
- y est la fonction inconnue (dérivable n fois),
- $(a_0, \dots, a_{n-1})$ sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$,
- b est une fonction continue de I dans $\mathbb{K}$ appelé second membre de l'équation différentielle.

Si b est la fonction constante égale à 0, on dit que l'équation est homogène.

Définition 2

Résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre n, c'est trouver l'ensemble des fonctions de $\mathscr{C}^n(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ solutions de l'équation.

1.2 Principes fondamentaux

Proposition 3

Soient $a_0, \dots, a_{n-1}, b$ des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$. Soit (E) l'EDL $y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = b$ et

$$\psi : \left| \begin{array}{l} \mathscr{C}^n(\mathrm{I}, \mathbb{K}) \to \mathscr{C}(\mathrm{I}, \mathbb{K}) \\ \qquad f \mapsto f^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^{(i)} \end{array} \right. .$$

1. (linéarité) L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène est un espace vectoriel.
2. (structure) Soit (E_h) l'équation homogène associée à (E), $\mathscr{S}_h$ l'ensemble des solutions de (E_h). Alors si f_0 est une solution particulière de (E), l'ensemble des solutions de (E) est $\{f_0 + g,\ g \in \mathscr{S}_h\}$.
3. (Principe de superposition) Soient f une solution de l'équation différentielle $y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = b$, et g une solution de l'équation différentielle $y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = c$, alors $f + g$ est solution de : $y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = b + c$.

1.3 Problème de Cauchy

Définition 4

Un problème de Cauchy associé à une équation différentielle $y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = b$ est un système de la forme $\begin{cases} y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = b, \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \quad \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$ où $x_0 \in \mathrm{I}$ et $(y_0, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ sont les conditions initiales du problème de Cauchy.

Théorème 5 (Théorème de Cauchy linéaire – admis et redémontré dans des cas particuliers)

Tout problème de Cauchy associé à une EDL admet une unique solution.

Corollaire 6

Soient $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ $n-1$ fonctions continues sur I. Soit $x_0 \in \mathrm{I}$. Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'EDL $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$. Alors l'application

$$\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathscr{S} \to \mathbb{R}^n \\ f \mapsto (f(x_0), f'(x_0), \ldots, f^{(n-1)}(x_0)) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Ainsi, $\dim(\mathscr{S}) = n$.

2 Équations différentielles du premier ordre

Proposition 7

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathscr{C}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$. Soit A une primitive de a (n'importe laquelle). L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{-A(x)},\ \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathrm{Vect}(x \mapsto e^{-A(x)})$.

Point de méthode 8 (Variation de la constante)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a et b continues de I dans $\mathbb{K}$, (E) l'équation $y' + ay = b$. Soit A une primitive de A. L'ensemble des solutions de (E) se détermine en considérant $z(x) = e^{A(x)}y(x)$ et en remarquant que z vérifie une équation plus simple que y.

Proposition 9 (Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a et b continues de I dans $\mathbb{K}$, $x_0 \in \mathrm{I}$, $y_0 \in \mathbb{K}$, et le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ Alors ce problème admet une unique solution f, donnée par

$$\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) = \int_{x_0}^{x} e^{\int_x^t a(s)ds} b(t)dt + y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt}.$$

3 Second ordre à coefficients constants

3.1 Équations homogènes

Proposition 10 (Le cas complexe)

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$, soit (E) l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$. Soit (e) l'équation caractéristique de (E) : $ar^2 + br + c = 0$, d'inconnue $r \in \mathbb{C}$. Soit Δ le discriminant de l'équation, $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Si $\Delta \neq 0$, (e) a deux solutions r_1 et r_2, donc l'ensemble des solutions est
$$\left\{x \mapsto \lambda e^{r_1.x} + \mu e^{r_2.x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\} = \mathrm{Vect}(x \mapsto e^{r_1.x}, x \mapsto e^{r_2.x}).$$
2. Si $\Delta = 0$, (e) a une solution r_0 et l'ensemble des solutions de (E) est
$$\left\{x \mapsto \lambda(\lambda + \mu.x)e^{r_0 x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\} = \mathrm{Vect}(x \mapsto e^{r_0.x}, x \mapsto xe^{r_0.x}).$$

Proposition 11 (Le cas réel)

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$, soit (E) l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$. Soit (e) l'équation caractéristique de (E) : $ar^2 + br + c = 0$, d'inconnue $r \in \mathbb{R}$. Soit Δ le discriminant de l'équation, $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Si $\Delta > 0$, (e) a deux solutions réelles r_1 et r_2, et l'ensemble des solutions réelles est
$$\left\{x \mapsto \lambda e^{r_1.x} + \mu e^{r_2.x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}(x \mapsto e^{r_1.x}, x \mapsto e^{r_2.x}).$$
2. Si $\Delta = 0$, (e) a une solution réelle r_0 et l'ensemble des solutions réelles de (E) est
$$\left\{x \mapsto \lambda(\lambda + \mu.x)e^{r_0 x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}(x \mapsto e^{r_0.x}, x \mapsto xe^{r_0.x}).$$
3. Si $\Delta < 0$, (e) admet deux solutions complexes conjuguées, $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$. L'ensemble des solutions réelles de (E) est donc
$$\{x \mapsto e^{\alpha x}(A.\sin(\beta x) + B.\cos(\beta x)),\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(x \mapsto e^{\alpha x}\sin(\beta x), x \mapsto e^{\alpha x}\cos(\beta x))$$

Remarque 12

On peut retrouver de la même manière l'ensemble des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

3.2 Seconds membres particuliers – résonances

Proposition 13

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, $a \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit (E) l'équation $ay'' + by' + cy = \lambda e^{\alpha x}$. Soit (e) l'équation caractéristique de (E) : $ar^2 + br + c = 0$.

1. si α n'est pas racine de (e), alors (E) admet une solution particulière de la forme $x \mapsto \mu e^{\alpha x}$, avec $\mu \in \mathbb{K}$.
2. si α est racine simple de (e) (i.e. α est racine de (e) et le discriminant de (e) est non nul), alors on (E) admet une solution particulière de la forme $x \mapsto \mu x e^{\alpha x}$, avec $\mu \in \mathbb{K}$.
3. si α est racine double de (e) (i.e. α est racine de (e) et le discriminant de (e) est nul), alors on (E) admet une solution particulière de la forme $x \mapsto \mu x^2 e^{\alpha x}$, avec $\mu \in \mathbb{K}$.

Point de méthode 14 (Traiter des seconds membres en sin / cos /sh/ch**)**

1. Pour trouver une solution particulière d'une éqaution différentielle **réelle** avec un second membre en sin ou en cos, par exemple
$$ay'' + by' + cy = \lambda \sin(\alpha x),$$
on trouve une solution particulière **complexe** de
$$ay'' + by' + cy = \lambda e^{i\alpha x},$$
puis on prend la partie imaginaire (si c'est un sinus) ou réelle (si c'est un cosinus) de la solution trouvée.
2. pour une équation différentielle quelconque avec sin / cos /sh/ch, on écrit ces fonctions comme somme d'exponentielles et on utilise le **principe de superposition**.

Proposition 15 (HP)

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^2$. L'équation $ay''(x) + by'(x)cy(x) = e^{\alpha x}P(x)$, avec P polynôme admet une solution de la forme $x \mapsto e^{\alpha x}Q(x)$ avec Q polynôme tel que

- $\deg(Q) = \deg(P) + 2$ si α est une racine double de l'équation caractéristique
- $\deg(Q) = \deg(P) + 1$ si α est une racine simple de l'équation caractéristique
- $\deg(Q) = \deg(P)$ si α n'est pas racine de l'équation caractéristique