

## Chapitre 23 Fractions rationnelles

### 1 Construction



Si vous n'aimez pas les constructions abstraites, vous pouvez sauter la définition 1 et passer directement à la définition 3 et à la remarque 4.

Nous allons faire le point sur une construction d'un corps de fractions à partir d'un anneau (HP, mais avoir une idée de la manière dont les choses sont construites).

#### Définition 1 (et prop)

Soit  $A$  un anneau intègre. On définit sur  $A \times A^*$  deux lois d'addition et de multiplication

- (i) Une addition :  $(a, b) + (c, d) = (ad + cb, bd)$ .
- (ii) Une multiplication :  $(a, b) \times (c, d) = (ac, bd)$ .

On définit aussi une relation d'équivalence sur  $A \times A^*$  par  $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$ .

L'ensemble  $(A \times A^*) / \sim$  muni des lois  $+$  et  $\times$  induites est un corps, appelé corps des fractions de  $A$ . C'est le plus petit corps contenant  $A$ .

#### Exemple 2

$\mathbb{Q}$  est le corps des fractions de  $\mathbb{Z}$ .

#### Définition 3

1. On définit alors l'ensemble  $\mathbb{K}(X)$  comme le corps des fractions de  $\mathbb{K}[X]$ , appelé corps des fractions rationnelles en une indéterminée.
2. Une fraction rationnelle  $R$  est donc représenté par un couple  $(P, Q)$  de polynômes où  $Q$  est non nul. On note  $R = \frac{P}{Q}$  et on note que le couple  $(P, Q)$  n'est pas unique !
3. Si  $(P_1, P_2) \in \mathbb{K}[X]^2$ , si  $(Q_1, Q_2) \in (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})^2$ ,  $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}$  si et seulement si  $P_1Q_2 = P_2Q_1$ .
4.  $(\mathbb{K}(X), +, \times)$  est donc un corps.
5. Si  $R = \frac{P}{Q}$  et  $Q|P$ , alors  $R \in \mathbb{K}[X]$ .
6. Si  $R_1 = \frac{P_1}{Q_1}$  et  $R_2 = \frac{P_2}{Q_2}$ ,

$$R_1 + R_2 = \frac{P_1Q_2 + P_2Q_1}{Q_1Q_2} \text{ et } R_1 \times R_2 = \frac{P_1P_2}{Q_1Q_2}.$$

7. Si  $R = \frac{P}{Q}$  et  $P \neq 0$ , alors l'inverse de  $R$  est noté  $\frac{1}{R}$ .
8. Si  $R = \frac{P}{Q}$ , avec  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  et  $Q = \sum_{k=0}^p b_k X^k$ , si  $S \in \mathbb{K}(X)$  est non constante, on définit

$$R \circ S = \frac{\sum_{k=0}^n a_k S^k}{\sum_{k=0}^p b_k S^k}.$$

**Remarque 4**

Il faut penser que les fractions rationnelles se manipulent comme on le souhaiterait !

$$1. \frac{X+1}{X^2-2X+1} = \frac{X}{X^2-2X+1} + \frac{1}{X^2-2X+1} = \frac{X+1}{(X-1)^2} = \frac{1}{X-1} + \frac{2}{(X-1)^2}$$

$$2. \frac{2X^2-2}{3(X^2-2X+1)} = \frac{2(X-1)(X+1)}{3(X-1)^2} = \frac{2(X+1)}{3(X-1)}.$$

Il faut donc retenir qu'une fraction rationnelle, c'est le « quotient » de deux polynômes.

**Définition 5**

Soit  $R \in \mathbb{K}(X)$ . Un représentant irréductible de  $R$  est un couple  $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$  tels que

- $R = \frac{P}{Q}$ ,
- $P \wedge Q = 1$ ,
- $Q$  est unitaire.

**Proposition 6**

Toute fraction rationnelle admet un unique représentant irréductible.

**Démonstration**

$\exists$  Soit  $(P, Q)$  un représentant de  $R$ .  
Alors on dispose de  $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$  tels que  $P = A \times (P \wedge Q)$  et  $Q = B \times (P \wedge Q)$ . Alors  $AQ = BP$ , donc  $R = \frac{A}{B}$ , avec  $A \wedge B = 1$ . Maintenant, si  $\lambda$  est le coefficient dominant de  $B$ ,

$$R = \frac{\frac{1}{\lambda}A}{\frac{1}{\lambda}B},$$

et  $\frac{1}{\lambda}B$  est bien unitaire.

$\exists!$  Supposons que  $R = \frac{P}{Q} = \frac{A}{B}$  avec  $(P, Q)$  premiers entre eux,  $(A, B)$  premiers entre eux,  $Q$  et  $B$  unitaires. Alors  $PB = QA$ . Donc

—  $B$  divise  $QA$ ,  $B \wedge A = 1$  donc, par le théorème de Gauss,  $B|Q$ ,

—  $Q|PB$ ,  $Q \wedge P = 1$ , donc, par le théorème de Gauss,  $Q|B$ ,

donc  $B$  et  $Q$  sont associés. Comme ils sont unitaires, ils sont égaux. Donc  $B = Q$ , comme  $PB = QA$ ,  $P = A$ .

■

**Définition 7**

Soit  $R$ , une fraction rationnelle,  $R = \frac{P}{Q}$ . La quantité  $\deg(P) - \deg(Q)$  est indépendante du représentant choisi. On l'appelle degré de la fraction rationnelle.

### Démonstration

Si  $R = \frac{P}{Q} = \frac{A}{B}$ ,  $PB = QA$  donc  $\deg(P) + \deg(B) = \deg(Q) + \deg(A)$ , donc

$$\deg(P) - \deg(Q) = \deg(A) - \deg(B)$$

■

### Remarque 8

Une fraction de degré nul n'est pas forcément constante ! Par exemple,  $\frac{X}{X+1}$  est de degré nul.



On a les formules que l'on veut avoir pour le degré :

### Proposition 9

Soit  $(R, S) \in \mathbb{K}(X)^2$ .

1.  $\deg(R + S) \leq \max(\deg(R), \deg(S))$ , avec égalité si  $\deg(R) \neq \deg(S)$ ,
2.  $\deg(R \times S) = \deg(R) + \deg(S)$ ,
3. si  $R \neq 0$ ,  $\deg \frac{1}{R} = -\deg(R)$ ,
4. si  $S$  est non constante,  $\deg(R \circ S) = \deg(R) \times \deg(S)$ .

### Définition 10

Soit  $R = \frac{P}{Q}$  une fraction rationnelle. Alors la quantité  $\frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$  ne dépend pas du couple représentant de  $R$  choisi. On l'appelle dérivée de  $R$  et on note

$$R' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}.$$

### Proposition 11

La dérivation vérifie les mêmes règles algébriques que la dérivation des fonctions.

### Définition 12

Soit  $R = \frac{P}{Q}$  une fraction de  $\mathbb{K}(X)$  sous forme irréductible.

1. On appelle zéro de  $R$  toute racine de  $P$ .
2. On appelle pôle de  $R$  toute racine de  $Q$ .

Si  $\lambda$  est un pôle, la multiplicité de  $\lambda$  dans  $R$  est la multiplicité de  $\lambda$  en tant que racine de  $Q$ .

### Exemple 13

1. Si  $R = \frac{X^2 + 2X + 1}{(X - 2)^2(X + 1)(X^2 + 1)} = \frac{X + 1}{(X - 2)^2(X^2 + 1)}$ ,
  - sur  $\mathbb{R}$  :  $-1$  est un zéro de  $R$ ,  $2$  est le seul pôle de  $R$ ,
  - sur  $\mathbb{C}$  :  $-1$  est un zéro de  $R$ ,  $2$ ,  $i$  et  $-i$  sont les pôles de  $R$ .
2. La notion de pôle et de zéro dépend du corps de base.

3. Un complexe  $\lambda$  ne peut pas être à la fois un pôle et un zéro d'une fraction rationnelle. En effet, cela signifierait que  $P(\lambda) = Q(\lambda) = 0$ , donc  $P$  et  $Q$  auraient une racine en commun, donc  $\frac{P}{Q}$  ne serait pas irréductible.

#### Définition 14

Soit  $R \in \mathbb{K}(X)$ ,  $R = \frac{P}{Q}$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Si  $\lambda$  n'est pas un pôle de  $R$ , on peut définir l'évaluation de  $R$  en  $\lambda$  par

$$R(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}.$$

## 2 Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$

Le but de cette section est pratique, il est d'écrire sous une forme bien particulière les fractions rationnelles : c'est la décomposition en éléments simples. Elles vont servir autant d'un point de vue pratique (calcul d'intégrales) que théorique (théorème de Gauss-Lucas).

Notre but est d'élargir des décompositions du type

$$\frac{1}{X(X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}.$$

Nous allons d'abord établir des théorèmes d'existence de la DES (Décomposition en Éléments Simples), puis donner des méthodes concrètes et pratico-pratiques de calcul.

### 2.1 Théorèmes d'existence

Le but est d'arriver aux deux propositions 17 et 19. Si vous ne voyez pas pourquoi on fait ce qu'il y a avant, lisez ces propositions.

#### Définition 15

Soit  $R = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ , irréductible. Alors il existe un unique  $E \in \mathbb{K}[X]$ ,  $S \in \mathbb{K}(X)$ , tels que  $R = E + S$  et  $\deg(S) < 0$ .  
On appelle  $E$  partie entière de  $R$ .

#### Démonstration

- ☐ Effectuons la division euclidienne de  $P$  par  $Q$  :  $P = AQ + B$ , avec  $\deg(B) < \deg(Q)$ . Alors

$$\frac{P}{Q} = \frac{AQ + B}{Q} = A + \frac{B}{Q},$$

$A \in \mathbb{K}[X]$  et  $\deg(B) - \deg(Q) < 0$ .

- ☐! Supposons  $R = E + S = F + T$ , avec  $(E, F) \in \mathbb{K}[X]$  et  $(S, T) \in \mathbb{K}(X)$ ,  $\deg(S) < 0$  et  $\deg(T) < 0$ . Alors  $E - F = T - S$  et  $\deg(T - S) < 0$ . Or, si  $E \neq F$ ,  $\deg(E - F) \geq 0$ , donc  $E = F$ , et  $T = S$ .

■

### Exemple 16

1. Nous avons déjà cherché une partie entière d'une fraction rationnelle, sans le savoir! En effet, lorsque l'on cherche une primitive de

$$\frac{x^2}{1+x^2},$$

on écrit (« astuce ») que

$$\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{x^2+1-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}.$$

Ce qu'on a fait est, en réalité, une division euclidienne!

### Proposition 17 (Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$ )

Soit  $R$  dans  $\mathbb{C}(X)$ ,  $R = \frac{P}{Q}$  avec  $P \wedge Q = 1$ . Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les racines de  $Q$  et  $m_1, \dots, m_n$  leurs multiplicités respectives. Il existe  $E$  dans  $\mathbb{C}[X]$ , de degré  $\deg(R)$  si  $\deg(R) \geq 0$  ( $E$  est nul sinon), et des complexes  $(a_{k\ell})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq \ell \leq m_k}}$  tel que

$$R(X) = E(X) + \sum_{k=1}^n \left( \sum_{\ell=1}^{m_k} \frac{a_{k\ell}}{(X - \lambda_k)^\ell} \right).$$

### Exemple 18

1. Si  $R(X) = \frac{3X^2+2}{(X+1)^2 X (X-\pi)^3}$ ,  $\deg(R) = -4$  donc il n'y a pas de partie entière. Ensuite, le théorème de décomposition en éléments simples nous donne l'existence de 6 réels  $(a, b, c, d, e, f)$  tels que

$$R(X) = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{c}{X} + \frac{d}{X-\pi} + \frac{e}{(X-\pi)^2} + \frac{f}{(X-\pi)^3}.$$

2. Si  $S(X) = \frac{X^3-4}{(X-1)(X-2)}$ , alors  $\deg(S) > 0$  donc il faut faire une division euclidienne.

**On développe le dénominateur pour faire la division euclidienne, c'est plus simple.** On écrit que

$$X^3 - 4 = (X+3)(X^2 - 3X + 2) + (7X - 10).$$

Ainsi,

$$S(X) = X + 3 + \frac{7X - 10}{(X-1)(X-2)}$$

On dispose alors de deux réels  $a$  et  $b$  tels que

$$S(X) = X + 3 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2}.$$

**Proposition 19 (Décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ )**

Soit  $R$  dans  $\mathbb{R}(X)$ , sous forme irréductible  $\frac{P}{Q}$ , telle que la décomposition de  $Q$  en produit d'irréductibles soit

$$Q(X) = K \left( \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)^{m_i} \right) \left( \prod_{k=1}^p (X^2 + b_k X + c_k)^{\mu_k} \right),$$

(avec  $b_k^2 - 4c_k < 0$  et  $K$  le coefficient dominant de  $Q$ .) Alors il existe  $E$  dans  $\mathbb{R}[X]$ , de degré  $\deg(R)$  si  $\deg(R) > 0$  (nul sinon), et des réels  $(\alpha_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m_i}}, (\beta_{k\ell})_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq \ell \leq \mu_k}}, (\gamma_{k\ell})_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq \ell \leq \mu_k}}$  tels que

$$R(X) = E(X) + \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{ij}}{(X - \lambda_i)^j} \right) + \sum_{k=1}^p \left( \sum_{\ell=1}^{\mu_k} \frac{\beta_{k\ell} X + \gamma_{k\ell}}{(X^2 + b_k X + c_k)^\ell} \right).$$

**Exemple 20**

Par exemple,

$$\begin{aligned} & \frac{3X + 1}{(X^2 + X + 1)^2 (X - 3)^3 (X + 1)} \\ &= \frac{a}{X + 1} + \frac{b}{X - 3} + \frac{c}{(X - 3)^2} + \frac{d}{(X - 3)^3} + \frac{eX + f}{X^2 + X + 1} + \frac{gX + h}{(X^2 + X + 1)^2}, \end{aligned}$$

avec  $(a, b, c, d, e, f, g, h)$  huit réels.

**Démonstration**

Nous n'allons pas donner l'existence en détail, mais juste donner quelques aspects intéressants de la preuve :

- la **partie entière** s'obtient à l'aide de la **division euclidienne** de  $P$  par  $Q$ .
- Si  $R = \frac{P}{Q_1 Q_2}$  avec  $Q_1$  et  $Q_2$  premiers entre eux, par le théorème de Bézout, on peut écrire  $Q_1 U_1 + Q_2 U_2 = 1$ , donc

$$\frac{P}{Q_1 Q_2} = \frac{Q_1 P U_1 + Q_2 P U_2}{Q_1 Q_2} = \frac{P U_1}{Q_2} + \frac{P U_2}{Q_1},$$

donc on peut « séparer » les termes premiers entre eux,

- si on s'intéresse à un terme du type

$$\frac{P}{(X - \alpha)^m},$$

avec  $\deg(P) < m$ , une formule de Taylor nous permet d'écrire cette fraction comme

$$\frac{\sum_{k=0}^m \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k}{(X - \alpha)^m} = \sum_{k=0}^m \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^{m-k}$$

■

### 3 Méthodes de calcul

**TD, exercices 2.1, 3, 4, 5, 6.** Faire les premiers calculs surtout.  
**Cahier de calculs, fiche 25 : de 25.1 à 25.6.**

#### Point de méthode 21 (Les trois premières étapes)

Ce sont **toujours** les mêmes :

1. On calcule la partie entière via une division euclidienne,
2. on vérifie que la fraction est irréductible,
3. on écrit la décomposition théorique.

Maintenant, comment gérer les différents pôles ?

#### Proposition 22 (Pôles simples)

Soit  $R \in \mathbb{K}(X)$  une fraction rationnelle,  $R = \frac{P}{Q}$  ( $P$  irréductible),  $\alpha$  un pôle simple de  $Q$ . Le coefficient  $a$  de  $\frac{1}{X - \alpha}$  dans la D.E.S. de  $R$  est donné par l'une de ces deux formules :

- si  $Q = (X - \alpha)\tilde{Q}$ ,  $a = \frac{P(\alpha)}{\tilde{Q}(\alpha)}$ .
- $a = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$ .

#### Démonstration

Il faut penser à la décomposition en éléments simples théorique : on sait que

$$\frac{P}{Q} = \frac{P}{(X - \alpha)\tilde{Q}} = \frac{a}{X - \alpha} + E_2 + E_3 + \dots,$$

où  $E_2, E_3$  sont des éléments simples, où il n'y a pas de  $X - \alpha$  ! Ainsi, en multipliant par  $X - \alpha$ , on obtient  $\frac{P}{\tilde{Q}} = a + (X - \alpha)E_2 + (X - \alpha)E_3 + \dots$

En évaluant en  $\alpha$ , tous les termes à droite s'annulent... sauf le  $a$  !

Pour la deuxième formule, il suffit de remarquer que  $Q' = \tilde{Q} + (X - \alpha)\tilde{Q}'$ , et donc  $Q'(\alpha) = \tilde{Q}(\alpha)$ . ■

**Point de méthode 23 (Pôle simple)**

4. pour déterminer le coefficient de  $\frac{1}{X - \alpha}$ , on multiplie  $R$  et la DES théorique par  $X - \alpha$  et on évalue en  $\alpha$ .

**Exemple.** 
$$\frac{1}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X-3}$$

Pour déterminer le coefficient de  $\frac{1}{X-1}$ , on multiplie tout par  $X-1$

$$\frac{1}{(X-2)(X-3)} = a + \frac{b(X-1)}{X-2} + \frac{c(X-1)}{X-3}$$

et on évalue en 1 :

$$\frac{1}{(-1)(-2)} = a + 0 + 0, \text{ i.e. } a = \frac{1}{2}.$$

**Exemple 24**

1. Déterminons la décomposition en éléments simples de  $\frac{X}{(X-1)(X-2)(X-3)}$ . La fraction est de degré strictement négatif, donc on sait que l'on dispose de trois réels  $(a, b, c)$  tels que

$$\frac{X}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X-3}.$$

Pour calculer  $a$ , on multiplie par  $X-1$  et on évalue en 1. On obtient

$$a = \frac{1}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}.$$

Pour calculer  $b$ , on multiplie par  $X-2$  et on évalue en 2. On obtient

$$b = \frac{2}{(2-1)(2-3)} = -2$$

Pour calculer  $c$ , on multiplie par  $X-3$  et on évalue en 3. On obtient

$$c = \frac{3}{(3-1)(3-2)} = \frac{3}{2}.$$

Ainsi,

$$\frac{X}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \frac{1}{2(X-1)} - \frac{2}{X-2} + \frac{3}{2(X-3)}.$$

2. La formule théorique peut être vraiment très utile! Exemple, recherchons la décomposition en éléments simples de  $\frac{1}{X^n - 1}$ . On écrit que

$$\frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})}.$$

Par le théorème de décomposition en éléments simples, on dispose de  $a_0, \dots, a_{n-1}$  tels que

$$\frac{1}{X^n - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}}.$$

En utilisant la formule théorique, en notant  $P(X) = 1$  et  $Q(X) = X^n - 1$ , on sait que

$$a_k = \frac{P(e^{\frac{2ik\pi}{n}})}{Q'(e^{\frac{2ik\pi}{n}})} = \frac{1}{n(e^{\frac{2ik\pi}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{ne^{\frac{2ik(n-1)\pi}{n}}} = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{n}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{X^n - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{n(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})}.$$

C'est satisfaisant, non ?

### Point de méthode 25

**5. Pôles multiples.** Si  $\alpha$  est un pôle de multiplicité  $m$  dans  $\mathbb{R}$ ,

- le coefficient de  $\frac{1}{(X - \alpha)^m}$  s'obtient comme les pôles simples : on multiplie tout par  $(X - \alpha)^m$  et on évalue en  $\alpha$ .

**Exemple.** Si  $R = \frac{2X + 1}{(X - 1)^2(X + 2)}$ , on sait que

$$R = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{(X - 1)^2} + \frac{c}{X + 2}.$$

En multipliant par  $(X - 1)^2$ ,

$$\frac{2X + 1}{X + 2} = a(X - 1) + b + \frac{c(X - 1)^2}{X + 2},$$

donc, en évaluant en 1,  $\frac{3}{3} = b$ .

- pour les autres coefficients, c'est plus délicat :

— la méthode systématique est de soustraire le terme en  $\frac{1}{(X - \alpha)^m}$  à  $R$ , et de tout remettre au même dénominateur : on obtient une nouvelle fraction rationnelle dont  $\alpha$  est un pôle de multiplicité  $m - 1$ .

**Exemple.** dans la fraction précédente,

$$R = \frac{a}{X - 1} + \frac{1}{(X - 1)^2} + \frac{c}{X + 2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} R - \frac{1}{(X - 1)^2} &= \frac{2X + 1}{(X - 1)^2(X + 2)} - \frac{1}{(X - 1)^2} \\ &= \frac{2X + 1 - (X + 2)}{(X - 1)^2(X + 2)} \\ &= \frac{X - 1}{(X - 1)^2(X + 2)} \\ &= \frac{1}{(X - 1)(X + 2)}. \end{aligned}$$

En multipliant par  $X - 1$  et en évaluant en 1, on obtient  $a = \frac{1}{3}$ .

— une autre possibilité, très efficace pour des termes en  $\frac{1}{X - \alpha}$ , est de multiplier par  $X$ , d'évaluer en  $x \in \mathbb{R}$  et de faire tendre  $x$  vers  $+\infty$ .

Toujours dans notre exemple, si on revient à

$$\frac{2X + 1}{(X - 1)^2(X + 2)} = \frac{a}{X - 1} + \frac{1}{(X - 1)^2} - \frac{1}{3(X + 2)},$$

alors pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$\frac{x(2x+1)}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{xa}{x-1} + \frac{x}{(x-1)^2} - \frac{x}{3(x+2)},$$

soit, en faisant tendre  $x$  vers  $+\infty$ ,

$$0 = a + 0 - \frac{1}{3}.$$

— une autre méthode peut être d'évaluer en certains points (si le coefficient dur à trouver est le dernier).

**Exemple.** Revenons à l'exemple précédent, en supposant que l'on n'a pas trouvé  $a$ . On était arrêtés à

$$R = \frac{a}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+2}.$$

On trouve très facilement  $c$ , en multipliant par  $X+2$  et en évaluant en  $-2$  :  $c = -\frac{1}{3}$ .

Donc

$$R = \frac{a}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{3(X+2)}.$$

Ensuite, on évalue en  $0$  :

$$\frac{1}{2} = -a + 1 - \frac{1}{6},$$

$$\text{donc } a = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

#### 6. Cas des éléments irréductibles de degré 2 dans $\mathbb{R}$ .

- si l'élément irréductible de degré 2 est à la puissance 1, on peut faire la DES sur  $\mathbb{C}$  et mettre au même dénominateur.

**Exemple.**  $\frac{2X+1}{X^2(X^2+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X-i} + \frac{d}{X+i}.$

$$c = \frac{2i+1}{i^2 \times 2i} = -1 + \frac{i}{2}.$$

Comme la fraction est réelle, elle est égale à son conjugué donc, par unicité de la DES,

$d = \bar{c} = -1 - \frac{i}{2}$ . Alors l'élément simple de degré 2 est

$$\begin{aligned} \frac{c}{X-i} + \frac{d}{X+i} &= \frac{-1 + \frac{i}{2}}{X-i} + \frac{-1 - \frac{i}{2}}{X+i} \\ &= \frac{-2X-1}{X^2+1} \end{aligned}$$

Cette méthode ne fonctionne pas si l'élément simple a une puissance  $> 1$  : ainsi

$$2 \frac{X^2-1}{(X^2+1)^2} = \frac{1}{(X-i)^2} + \frac{1}{(X+i)^2}$$

En rassemblant les deux, on retombe sur la formule de départ, qui n'est pas une DES.

- si on doit faire la DES de  $\frac{P}{(X^2+bX+c)^m}$ , déjà, on n'a pas de chance. Ensuite, on peut s'en sortir à l'aide de divisions euclidiennes successives :

$$P(X) = (X^2 + bX + c)Q(X) + \alpha X + \beta,$$

donc

$$\frac{P(X)}{(X^2 + bX + c)^m} = \frac{Q(X)}{(X^2 + bX + c)^{m-1}} + \frac{\alpha X + \beta}{(X^2 + bX + c)^m}$$

**Exemple.** DES de  $R(X) = \frac{X^4}{(X^2+1)^3}$ .



—  $X^4 = (X^2 + 1)(X^2 - 1) + 1$ , donc

$$R(X) = \frac{X^2 - 1}{(X^2 + 1)^2} + \frac{1}{(X^2 + 1)^3}.$$

$X^2 - 1 = (X^2 + 1)1 - 2$  donc

$$R(X) = \frac{1}{X^2 + 1} - \frac{2}{(X^2 + 1)^2} + \frac{1}{(X^2 + 1)^3}.$$

7. penser aux trois « méthodes originales » que l'on a vues : évaluer en un point, multiplier par  $X$  et prendre la limite, ou le cas des fractions réelles (coefficients complexes conjugués)

## 4 Intégrales de fractions rationnelles

**TD, exercices 2.2, 7.** Pour le 7, surtout les 1,2,3.

**Cahier de calculs, fiche 14.** Pour la base du calcul sur les éléments simples.

**Cahier de calculs, fiche 25 : de 25.7 à 25.8.**

### Point de méthode 26

1. Faire la DES de la fraction rationnelle (sur  $\mathbb{R}$  ou sur  $\mathbb{C}$ )

2. On calcule l'intégrale de chaque élément simple :

- si  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\int^x \frac{1}{t - \alpha} dt = \ln(|x - \alpha|)$ ,
- si  $m > 1$ ,  $\int^x \frac{1}{(t - \alpha)^m} = \frac{1}{-m + 1} (X - \alpha)^{-m+1}$ ,
- $\int^x \frac{dt}{t^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{t - a}{t + a} \right|$ ,
- $\int^x \frac{1}{1 + t^2} dt = \text{Arctan}(x)$ ,
- $\int^x \frac{dt}{a^2 + t^2} = \frac{1}{a} \text{Arctan} \frac{t}{a}$ ,
- pour calculer  $\int^x \frac{dt}{t^2 + bt + c}$  avec  $b^2 - 4c < 0$ , on passe par la forme canonique,
- pour calculer  $\int^x \frac{pt + q}{t^2 + bt + c} dt$  avec  $b^2 - 4c < 0$ , on fait apparaître la dérivée du dénominateur.
- pour calculer  $\int^x \frac{pt + q}{(t^2 + bt + c)^m} dx$  avec  $b^2 - 4c < 0$ , déjà on n'a pas de chance... On fait ensuite apparaître la dérivée du dénominateur et on se ramène à calculer  $\int^x \frac{dt}{(t^2 + bt + c)^m}$ .  
Pour cette intégrale, changement de variables pour se ramener à  $\frac{1}{(t^2 + 1)^m}$ , et IPP + récurrence. Nous explicitons la récurrence : si  $I_m = \int^x \frac{dt}{(t+1)^m}$ , en posant  $u(t) = \frac{1}{(1 + t^2)^m}$  et

$$v'(t) = 1,$$

$$\begin{aligned} I_m &= \frac{x}{(1+x^2)^m} - 2m \int^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{m+1}} \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^m} - 2m \int^x \frac{1+t^2-1}{(1+t^2)^{m+1}} \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^m} + 2mI_m - 2mI_{m+1}. \end{aligned}$$

On a donc une relation de récurrence.

## 5 Intégrales de fractions en sin/cos/tan

**TD, exercice 8.** 1 et 2 (le reste est dégoûtant).

On veut calculer une intégrale qui est une fraction rationnelle en sin / cos / tan, par exemple

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)} dx.$$

L'idée est d'opérer un changement de variables qui va nous ramener à une fraction rationnelle. Il existe des règles « toutes faites », dites « règles de Bioche » mais elles ne sont pas au programme et encombrant la tête pour rien.

### Point de méthode 27

Si on veut calculer une primitive ou une intégrale d'une fraction rationnelle en sin / cos / tan :

- si la fraction peut s'écrire sous la forme  $R(\sin(\theta)) \cos(\theta)$ , alors on pose  $t = \sin(\theta)$ ,
- si la fraction peut s'écrire sous la forme  $R(\cos(\theta)) \sin(\theta)$ , alors on pose  $t = \cos(\theta)$ ,
- si la fraction peut s'écrire sous la forme  $R(\tan(\theta))(1 + \tan^2(\theta))$ , alors on pose  $t = \tan(\theta)$ ,
- si rien ne marche, on pose  $t = \tan(\theta/2)$ . Alors  $\sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2}$ ,  $\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  et  $\tan(\theta) = \frac{2t}{1-t^2}$ .

## 6 Un résultat théorique important

### Proposition 28

Soit  $P$  un polynôme scindé sur  $\mathbb{K}$ ,  $P(X) = C \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i}$  avec  $C \in \mathbb{K}$ ,  $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{K}^r$ , deux à deux distincts,  $(m_1, \dots, m_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ . Alors

1.  $P'(X) = C \sum_{i=1}^r m_i (X - \alpha_i)^{m_i-1} \prod_{\substack{1 \leq k \leq r \\ k \neq i}} (X - \alpha_k)^{m_k}$ ,
2.  $\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^r \frac{m_i}{X - \alpha_i}$ .

**Exemple 29**

1. On dit que  $\frac{P'}{P}$  est la dérivée logarithmique de  $P$ . C'est ce qui correspondrait à la dérivée de «  $\ln(P)$  », si  $P$  était réel positif.
2. Par exemple, si  $P$  est un polynôme tel que

$$\frac{P'}{P} = \frac{3}{X-1} + \frac{2}{X},$$

je sais **automatiquement** que  $P = C(X-1)^3 X^2$  ! C'est satisfaisant, non ?

3. Faisons une fois encore la recherche des  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $P'|P$ . En fait, si  $P'|P$ , on sait que l'on dispose de  $Q$  de degré 1 tel que  $P = QP'$ . On dispose donc de  $\lambda \in \mathbb{K}$  et de  $\alpha \in \mathbb{K}$  tels que  $P = \lambda(X - \alpha)P'$ .

Notons alors  $n = \deg(P)$ . En regardant les coefficients dominants de  $P$  et de  $P'$ , on en déduit que  $\lambda = \frac{1}{n}$ . Ainsi,  $P = \frac{1}{n}(X - \alpha)P'$ . Donc

$$\frac{P'}{P} = \frac{n}{X - \alpha}$$

Par le résultat précédent, on en déduit que  $P = C(X - \alpha)^n$ .

La dernière application, je la trouve particulièrement jolie... mais on est sur du hors-programme culturel, pas besoin du tout de lire cela pour ce chapitre !

**Définition 30**

Soit  $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . On dit que  $z$  est dans l'enveloppe convexe de  $(z_1, \dots, z_n)$  s'il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$  tels que

$$z = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i \text{ et } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

**Remarque 31**

Il faut voir cette définition comme signifiant que  $z$  est « à l'intérieur » du polygône formé par les points  $(z_1, \dots, z_n)$ , ou que  $z$  est une moyenne des points  $(z_1, \dots, z_n)$ .

**Théorème 32 (Théorème de Gauss-Lucas – Hors-Programme complet !)**

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ . Alors les racines de  $P'$  sont dans l'enveloppe convexe des racines de  $P$ .

**Démonstration**

Écrivons  $P(X) = \Lambda \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i}$ . Soit  $z$  une racine de  $P'$ .

- si  $z$  est une racine de  $P$ , c'est ok !
- sinon,  $P'(z) = 0$  donc  $\frac{P'(z)}{P(z)} = 0$ . Donc, par la décomposition en éléments simples de  $\frac{P'}{P}$ ,

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^r \frac{m_k}{z - \alpha_k},$$

donc, en multipliant chaque fraction de la somme par la quantité conjuguée,

$$\sum_{k=1}^r \frac{m_k(\bar{z} - \bar{\alpha}_k)}{|z - \alpha_k|^2} = 0,$$

donc, en conjuguant,

$$\sum_{k=1}^r \frac{m_k(z - \alpha_k)}{|z - \alpha_k|^2} = 0,$$

Posons alors  $\mu_k = \frac{m_k}{|z - \alpha_k|^2}$ . Alors

$$\sum_{k=1}^r \mu_k(z - \alpha_k) = 0,$$

i.e.

$$\sum_{k=1}^r \mu_k z = \sum_{k=1}^r \mu_k \alpha_k$$

donc

$$z = \sum_{k=1}^r \frac{\mu_k}{\sum_{i=1}^r \mu_i} \alpha_k = \sum_{k=1}^r \lambda_k \alpha_k,$$

avec  $\lambda_k = \frac{\mu_k}{\sum_{i=1}^r \mu_i} \in [0, 1]$ , et  $\sum_{k=1}^r \lambda_k = 1$ .

D'où le résultat ! ■