

DM 19 – pour le lundi 04/05 ou sur cahier-de-prépa

Sujet d'après Centrale MP 2017. Formules : l'idée est simple, aller **au bout d'une partie. INDIQUEZ EN DÉBUT DE DM LES PARTIES TRAITÉES.**

Décomposition d'une variable aléatoire

Dans tout ce problème, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé fini.

On ne fera pas forcément la différence entre « X est à valeurs dans A » et « X est presque sûrement à valeurs dans A » (si A est un ensemble).

NB. La partie D est totalement indépendante des trois autres parties.

A. Partie préliminaire : polynôme générateur d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} , définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On définit le polynôme générateur de X comme

$$G_X : t \mapsto \mathbb{E}(t^X),$$

défini pour tout t dans \mathbb{R} .

Étant donné que X est définie sur Ω , univers fini, et à valeurs dans \mathbb{N} , elle ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs et est donc nécessairement bornée.

Soit enfin n un entier naturel.

- Justifier que si X est à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, alors

$$G_X : t \mapsto \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k)t^k,$$

- Calculer G_X lorsque...

- ... X est une variable presque sûrement constante égale à a , $a \in \mathbb{N}$.
- ... X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.
- ... X suit une loi binomiale de paramètres (n, p) .

- Application.** Soit $n \in \mathbb{N}$, $X \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{n}\right)$. Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $t > 1$,

$$\mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq t^{-\varepsilon} \left(1 + \frac{t-1}{n}\right)^n.$$

Quelle est la limite de cette borne quand n tend vers $+\infty$?

- Démontrer que si X' est une autre variable aléatoire, alors $G_X = G_{X'}$ si, et seulement si X et X' suivent la même loi.
- Démontrer que si Y est une variable aléatoire indépendante de X , alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

B. Truquage de deux dés

On se demande dans cette partie s'il est possible de truquer deux dés pour obtenir une loi uniforme sur $\llbracket 2, 12 \rrbracket$. En d'autres termes, existe-t-il X et Y variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ telles que $X+Y$ suivent la loi uniforme sur $\llbracket 2, 12 \rrbracket$. On suppose que c'est le cas : $X+Y \sim \mathcal{U}(\llbracket 2, 12 \rrbracket)$.

- Démontrer qu'il existe deux polynômes Q et R de degré inférieur ou égal à 5 tels que

$$G_X(t) = tQ(t) \text{ et } G_Y(t) = tR(t).$$

7. Démontrer, en utilisant le fait que $X + Y \sim \mathcal{U}(\llbracket 2, 12 \rrbracket)$, que pour tout t réel

$$G_{X+Y}(t) = \frac{t^2}{11}(1 + t + \dots + t^{10}) = \frac{t^2}{11} \frac{t^{11} - 1}{t - 1}.$$

8. Démontrer qu'alors pour tout t réel, $Q(t)R(t) = \frac{1}{11}(1 + t + \dots + t^{10})$, puis aboutir à une contradiction et conclure. **Indication.** On pourra s'intéresser aux racines de ces polynômes.

C. Décomposition d'une variable en deux variables indépendantes

Si X est une variable aléatoire sur Ω , à valeurs dans \mathbb{N} , on dit que X satisfait la propriété (\mathcal{D}) si

(\mathcal{D}) il existe Y et Z deux variables aléatoires indépendantes, non constantes presque sûrement, à valeurs dans \mathbb{N} , telles que X et $Y + Z$ suivent la même loi.

C-I. Quelques généralités

9. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . Démontrer que si X vérifie la propriété (\mathcal{D}) , alors il existe deux polynômes U et V à coefficients positifs, qui ne sont pas des monômes, et tels que $G_X = UV$.
10. Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ où $n \geq 1$ et $p \in [0, 1]$. Démontrer que X vérifie la propriété (\mathcal{D}) si, et seulement si $n \geq 2$.

Soit A le polynôme $A(T) = T^4 + 2T + 1$.

11. Soient $U(T)$ et $V(T)$ deux polynômes à coefficients réels positifs ou nuls tels que $U(T)V(T) = A(T)$. Montrer que l'un des polynômes $U(T)$ ou $V(T)$ est constant.
Indication. On pourra distinguer les cas selon les valeurs des degrés de $U(T)$ et $V(T)$.
12. En déduire qu'il existe une variable aléatoire X vérifiant (\mathcal{D}) , telle que X^2 ne vérifie pas (\mathcal{D}) .
Indication. On pourra considérer le polynôme $\frac{1}{4}A(T)$ et l'interpréter comme polynôme générateur d'une certaine variable aléatoire.

Dans la suite de la partie C., n est un entier naturel supérieur ou égal à 3 et X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} , définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et suivant la loi **uniforme** sur $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On rappelle qu'on a alors

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}, \text{ et } G_X : t \mapsto \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} t^k.$$

On va démontrer le résultat suivant : X vérifie la propriété (\mathcal{D}) si, et seulement si n n'est pas premier.

C-II. Sens réciproque

On suppose dans cette sous-partie que n n'est pas premier : il existe des entiers a et b , supérieurs ou égaux à 2, tels que $n = ab$.

13. Montrer qu'il existe un unique couple de variables aléatoires entières (Q, R) définies sur Ω , telles que pour tout ω dans Ω ,

$$X(\omega) = aQ(\omega) + R(\omega), \text{ et } R(\omega) \in \llbracket 0, a-1 \rrbracket.$$

14. Préciser la loi de (Q, R) puis les lois de Q et de R .
15. En déduire que X vérifie la propriété (\mathcal{D}) .

C-III. Étude du sens direct

On suppose dans cette sous-partie que n est un nombre premier et on établit que X ne vérifie pas la propriété (D).

16. Montrer qu'il **suffit** de prouver le résultat suivant : si U et V sont des polynômes de $\mathbb{R}[T]$ (ici, T est l'indéterminée) à coefficients dans \mathbb{R}_+ tels que $U(T)V(T) = 1 + T + \dots + T^{n-1}$, alors l'un des polynômes U ou V est constant.

Dans ce qui suit, on fixe des polynômes U et V de $\mathbb{R}[T]$ unitaires à coefficients dans \mathbb{R}_+ tels que

$$U(T)V(T) = 1 + T + \dots + T^{n-1}.$$

On pose $r = \deg(U)$ et $s = \deg(V)$ et on suppose par l'absurde que r et s sont non nuls.

17. Montrer que $U(T) = T^r U\left(\frac{1}{T}\right)$ et $V(T) = T^s V\left(\frac{1}{T}\right)$.

On note alors $U(T) = 1 + u_1 T + \dots + u_{r-1} T^{r-1} + T^r$ et $V(T) = 1 + v_1 T + \dots + v_{s-1} T^{s-1} + T^s$, avec $r \leq s$ (quitte à échanger les rôles de U et V).

18. Montrer que $\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $u_k v_k = 0$.
 19. En déduire que $\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $u_k \in \{0, 1\}$ et $v_k \in \{0, 1\}$.
 20. Conclure. **Indication.** On pourra d'abord montrer que tous les coefficients de V sont à valeurs dans $\{0, 1\}$.

D. Décomposition en un grand nombre de variables aléatoires

Dans cette partie, les variables aléatoires ne sont plus à valeurs dans \mathbb{N} **mais à valeurs dans** \mathbb{R} .

On cherche à savoir s'il existe des variables aléatoires X sur Ω vérifiant la propriété suivante :

- (Q) Pour tout entier m dans \mathbb{N}^* , il existe m variables aléatoires réelles $X_{m,1}, \dots, X_{m,m}$ mutuellement indépendantes, de même loi, telles que $X_{m,1} + \dots + X_{m,m}$ suive la même loi que X .

On va montrer que, lorsque Ω est fini (ce qui est le cas en sup), il n'y a que les variables presque sûrement constantes qui vérifient cette propriété.

21. On suppose ici que X est presque sûrement constante égale à a . Montrer que X vérifie la propriété Q.

On suppose désormais, et jusqu'à la fin du problème, que X vérifie la propriété Q.

Comme Ω est fini, X est bornée. On note $M = \max_{\omega \in \Omega} |X(\omega)|$.

Soit n dans \mathbb{N}^* , X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes et de même loi, telles que $X_1 + \dots + X_n$ ait même loi que X .

22. Montrer que pour tout i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, $X_i \leq \frac{M}{n}$ presque sûrement.
 23. En déduire que pour tout i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, $|X_i| \leq \frac{M}{n}$ presque sûrement.
 24. Démontrer que $\mathbb{V}(X) \leq \frac{M^2}{n}$, où $\mathbb{V}(X)$ désigne la variance de X .
 25. En déduire que X est presque sûrement constante.