

DM 19 bis – non ramassé – bonus de vacances

Problème 1. Inégalités de concentration en probabilités

Dans ce problème, on considère $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi que X où X est une variable aléatoire à valeurs réelles, d'espérance μ , de variance $\sigma^2 > 0$. De plus, pour tout entier $n > 0$, et pour tout réel x , on suppose

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \leq x\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \geq -x\right).$$

A. Questions préliminaires

1. Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Puis démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

2. Dans cette question uniquement, on suppose que $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la variable $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i + 1}{2}$ suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \left[\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right| \geq 1\right) \right] = -\ln(2)$$

B. Une loi des grands nombres logarithmique

On revient maintenant au cas général. On considère deux entiers strictement positifs n et q et deux réels strictement positifs ε_1 et ε_2 .

3. Justifier que les deux variables aléatoires $\sum_{i=1}^n X_i$ et $\sum_{i=n+1}^{n+q} X_i$ sont indépendantes, puis établir que

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n+q} X_i \geq \varepsilon_1 + \varepsilon_2\right) \geq \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq \varepsilon_1\right) \mathbb{P}\left(\sum_{i=n+1}^{n+q} X_i \geq \varepsilon_2\right)$$

4. Soit $\varepsilon > 0$. On pose pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \geq \varepsilon\right).$$

Prouver que pour tout $n \geq 1$ et tout $q \geq 1$, $u_{n+q} \geq u_n u_q$.

Dans toute la suite de cette partie, on suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbb{P}(X - \mu \geq \varepsilon) > 0$.

5. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n > 0$. On pose alors $\alpha_n = -\ln(u_n)$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sous-additive, c'est-à-dire que pour tout $n \geq 1$ et tout $q \geq 1$,

$$0 \leq \alpha_{n+q} \leq \alpha_n + \alpha_q.$$

6. Soit un entier $q \geq 1$, on pose $\beta_q = \sup \{\alpha_r, 1 \leq r < q\}$. Montrer que, pour tout entier $k \geq q$, on a

$$\frac{\alpha_k}{k} \leq \frac{\alpha_q}{q} + \frac{\beta_q}{k}.$$

Indication : on pourra utiliser la division euclidienne de k par q .

7. En déduire que la suite $\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ converge vers $\inf \left\{ \frac{\alpha_k}{k}, k \geq 1 \right\}$.
On reviendra à la définition épsilonlesque de la borne inférieure.

8. Déduire des questions précédentes que la suite de terme général

$$-\frac{1}{n} \ln \left[\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \right| \geq \varepsilon \right) \right]$$

admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$. Puis comparez ce résultat avec celui des questions préliminaires.

C. Cas borné

Pour finir, on suppose que X est à valeurs dans un intervalle $[a, b]$. On note toujours μ son espérance.

9. Soit Y une variable aléatoire centrée, à valeurs dans $[-1, 1]$. Démontrer que pour tout $\gamma \in [-1, 1]$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{t\gamma} \leq \frac{1}{2}(1 - \gamma)e^{-t} + \frac{1}{2}(1 + \gamma)e^t,$$

puis en déduire que

$$\mathbb{E}(e^{tY}) \leq \text{ch}(t).$$

On admet que, par une étude de fonctions, $\text{ch}(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$. On a donc

$$\mathbb{E}(e^{tY}) \leq e^{\frac{t^2}{2}}.$$

10. En considérant $Y = \frac{X - \mu}{b - a}$, vérifier que Y est centrée et à valeurs dans $[-1, 1]$ et en déduire que pour tout t réel,

$$\mathbb{E}(e^{t(X-\mu)}) \leq e^{\frac{t^2(b-a)^2}{2}}.$$

11. Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant le résultat de la question précédente, appliquée à la variable aléatoire $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)$, et en choisissant un t convenable, montrer que

$$\mathbb{P} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu) \geq \varepsilon \right) \leq \exp \left(-\frac{n\varepsilon^2}{2(b-a)^2} \right),$$

puis majorer $\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu) \right| \geq \varepsilon \right)$. Comparer avec le résultat de la question 8.

Problème 2. Étude d'une équation fonctionnelle

L'objet de ce problème est de résoudre dans certains cas l'équation fonctionnelle suivante :

$$f(x) - \int_0^x (x-t)f(t)dt = g(x), \quad (1)$$

où f est une fonction inconnue supposée continue sur \mathbb{R} et g est une fonction donnée définie sur \mathbb{R} .

A. Cas où $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Dans cette partie seulement, on suppose que la fonction g est deux fois dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée seconde continue.

- 12.** Soit f une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Démontrer que si f est solution de (1), alors f est deux fois dérivable et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - f(x) = g''(x). \quad (2)$$

Préciser aussi la valeur de $f(0)$ et de $f'(0)$.

- 13.** Soit f une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Démontrer que si f vérifie

$$\begin{cases} f'' - f = g'' \\ f(0) = g(0) \\ f'(0) = g'(0) \end{cases}$$

alors f est solution de (1).

- 14.** En déduire l'ensemble des solutions de (1) lorsque g est nulle.
15. Démontrer que, pour une fonction g quelconque, l'équation (1) admet au plus une solution.
16. Déterminer l'unique solution de (1) lorsque $g : x \mapsto e^x$.
17. Démontrer que, dans le cas général, pour tous λ et μ dans \mathbb{R} , la fonction

$$f : x \mapsto \frac{e^x}{2} \left(\int_0^x e^{-t} g''(t) dt + \lambda \right) - \frac{e^{-x}}{2} \left(\int_0^x e^t g''(t) dt + \mu \right)$$

est solution de (2). En déduire l'unique solution de (1).

B. Cas où g est seulement continue

On suppose désormais que g est seulement continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On note E l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

On note $A : f \mapsto A(f)$ l'application de E dans E définie par, pour toute f dans E ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, A(f)(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt.$$

18. Démontrer que A est un endomorphisme injectif.

On note $U : f \mapsto U(f)$ l'application de E dans E définie par, pour toute f dans E ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, U(f)(x) = \int_0^x \text{sh}(x-t)f(t)dt.$$

On admet que U est un endomorphisme de E .

19. Soit $f \in E$. Démontrer que $A(f)$ et $U(f)$ sont deux fois dérivables et trouver des expressions simples de $A(f)''$ et $U(f)''$.

20. Soit $f \in E$. On note $\alpha = U \circ A(f)$, $\beta = A \circ U(f)$ et $\gamma = U(f) - A(f)$. Démontrer que $\alpha = \beta = \gamma$.

21. Démontrer que les applications

$$\text{Id}_E - A : \begin{cases} E \rightarrow E \\ f \mapsto f - A(f) \end{cases} \quad \text{et} \quad \text{Id}_E + U : \begin{cases} E \rightarrow E \\ f \mapsto f + U(f) \end{cases}$$

sont des bijections de E dans E , réciproques l'une de l'autre.

En déduire la solution générale du problème (1).

C. Convergence de la somme des itérés de A

On désigne par A_n la n -ième itérée de l'application A :

$$A_2(f) = A(A(f)), \dots, A_n(f) = A(A_{n-1}(f)).$$

22. Démontrer que pour toute f dans E , pour tout x dans \mathbb{R} ,

$$A_n(f)(x) = \int_0^x \frac{1}{(2n+1)!} (x-t)^{2n+1} f(t) dt.$$

On note, si $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = A + A_2 + \dots + A_n,$$

c'est-à-dire que pour toute fonction f dans E ,

$$U_n(f) = A(f) + A_2(f) + \dots + A_n(f).$$

23. Démontrer que pour tout n dans \mathbb{N} , pour tout x dans \mathbb{R} ,

$$\text{sh}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \int_0^x \text{ch}(t) \frac{(x-t)^{2n}}{2n!} dt.$$

24. En déduire que pour tout x dans \mathbb{R} , pour tout n dans \mathbb{N} , on a

$$\left| \text{sh}(x) - \sum_{k=1}^n \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \right| \leq \frac{\text{ch}(x) \cdot |x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Conclure ainsi que pour tout réel x ,

$$|U(f)(x) - U(n)(f)(x)| \leq \frac{\text{ch}(x) \cdot |x|^{2n}}{(2n)!} \left| \int_0^x |f(t)| dt \right|$$

25. Retrouver le résultat de la question 20.

26. En utilisant les résultats des deux parties précédentes, et en faisant une analogie judicieuse, expliquer pourquoi le fait que $I - A$ et $I + U$ soient inverses est cohérent.