DM 19 bis – non ramassé – bonus de vacances

Problème 1. Inégalités de concentration en probabilités

Dans ce problème, on considère $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi que X où X est une variable aléatoire à valeurs réelles, d'espérance μ, de variance $\sigma^2 > 0$. De plus, pour tout entier $n > 0$, et pour tout réel x, on suppose

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\leqslant x\right)=\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\geqslant -x\right).$$

A. Questions préliminaires

1. Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$. Puis démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right|\geqslant\varepsilon\right)=0.$$

Correction

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i)=\frac{1}{n}n\mu=\mu.$$

Ensuite,

$$\mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right).$$

Par indépendance mutuelle de $(X_1,\dots,X_n)$,

$$\mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i)=\frac{\sigma^2}{n}.$$

Ainsi, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, si $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right|\geqslant\varepsilon\right)&=\mathbb{P}\left(\left|\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)-\mu\right|\geqslant\varepsilon\right)\\&\leqslant\frac{\mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)}{\varepsilon}=\frac{\sigma^2}{n\varepsilon}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.\end{aligned}$$

2. Dans cette question uniquement, on suppose que $\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=-1)=\frac{1}{2}$. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que la variable $S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i+1}{2}$ suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left[\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right|\geqslant 1\right)\right]=-\ln(2)$$

Correction

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On remarque que, comme X_i est à valeurs dans $\{-1, 1\}$, $X_i + 1$ est à valeurs dans $\{0, 2\}$, donc $\dfrac{X_i + 1}{2}$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$: il s'agit donc d'une variable de Bernoulli, de paramètre $p = \mathbb{P}\left(\dfrac{X_i + 1}{2} = 1\right) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \dfrac{1}{2}$.

De plus, les variables $\left(\dfrac{X_i + 1}{2}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont mutuellement indépendantes, donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i + 1}{2}$ suit une loi binomiale de paramètres $(n, 1/2)$.

Ainsi, si l'on note $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i + 1}{2}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \geqslant 1\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - \frac{1}{2}\right| \geqslant \frac{1}{2}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left|S_n - \frac{n}{2}\right| \geqslant \frac{n}{2}\right) \\
&= \mathbb{P}(\{S_n = 0\} \sqcup \{S_n = n\}) = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{n} \ln\left[\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \geqslant 1\right)\right] = \frac{1}{n} \times -(n-1)\ln(2) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\ln(2).$$

B. Une loi des grands nombres logarithmique

On revient maintenant au cas général. On considère deux entiers strictement positifs n et q et deux réels strictement positifs ε_1 et ε_2.

3. Justifier que les deux variables aléatoires $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $\displaystyle\sum_{i=n+1}^{n+q} X_i$ sont indépendantes, puis établir que

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n+q} X_i \geqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2\right) \geqslant \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant \varepsilon_1\right) \mathbb{P}\left(\sum_{i=n+1}^{n+q} X_i \geqslant \varepsilon_2\right)$$

Correction

On sait que $(X_1, \ldots, X_{n+q})$ sont mutuellement indépendantes, donc, d'après le lemme des coalitions, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $\displaystyle\sum_{i=n+1}^{n+q} X_i$ sont indépendantes.

Ensuite, on remarque que pour tout ω dans Ω,

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) \geqslant \varepsilon_1 \text{ et } \sum_{i=n+1}^{n+q} X_i(\omega) \geqslant \varepsilon_2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+q} X_i(\omega) \geqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant \varepsilon_1\right\} \cap \left\{\sum_{i=n+1}^{n+q} X_i \geqslant \varepsilon_2\right\}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n+q} X_i \geqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2\right).$$

Donc, par indépendance,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n+q} X_i \geqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2\right) \geqslant \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant \varepsilon_1\right) \mathbb{P}\left(\sum_{i=n+1}^{n+q} X_i \geqslant \varepsilon_2\right)$$

4. Soit $\varepsilon > 0$. On pose pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) \geqslant \varepsilon\right).$$

Prouver que pour tout $n \geqslant 1$ et tout $q \geqslant 1$, $u_{n+q} \geqslant u_n u_q$.

Correction

Soit $n \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+q} &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{n+q}\sum_{i=1}^{n+q}(X_i - \mu) \geqslant \varepsilon\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n+q}(X_i - \mu) \geqslant n\varepsilon + q\varepsilon\right) \\ &\geqslant \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant n\varepsilon\right) \mathbb{P}\left(\sum_{i=n+1}^{n+q} X_i \geqslant q\varepsilon\right) \quad \text{en prenant } \varepsilon_1 = n\varepsilon \text{ et } \varepsilon_2 = q\varepsilon \text{ dans la question précédente} \\ &\geqslant u_n \mathbb{P}\left(\sum_{i=n+1}^{n+q} X_i \geqslant q\varepsilon\right) \end{aligned}$$

Mais $(X_1, \dots, X_{n+q})$ sont iid, donc $\boxed{\displaystyle\sum_{i=n+1}^{n+q} X_i \text{ a la même loi que } \sum_{i=1}^{q} X_i.}$ Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=n+1}^{n+q} X_i \geqslant q\varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{q} X_i \geqslant q\varepsilon\right) = u_q.$$

$\boxed{\text{Donc } u_{n+q} \geqslant u_n u_q.}$

Dans toute la suite de cette partie, on suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbb{P}(X - \mu \geqslant \varepsilon) > 0$.

5. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1, u_n > 0$. On pose alors $\alpha_n = -\ln(u_n)$ pour tout $n \geqslant 1$. Montrer que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sous-additive, c'est-à-dire que pour tout $n \geqslant 1$ et tout $q \geqslant 1$,

$$0 \leqslant \alpha_{n+q} \leqslant \alpha_n + \alpha_q.$$

Correction

Par l'hypothèse qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbb{P}(X - \mu \geqslant \varepsilon) > 0$, on en déduit que $u_1 > 0$. Mais, par la question précédente, et par récurrence immédiate, on a, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\boxed{u_n \geqslant u_1^n > 0}$.
Ensuite, si $n \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$,

$$u_{n+q} \geqslant u_n u_q \text{ donc } -\ln(u_{n+q}) \leqslant -\ln(u_n) - \ln(u_q),$$

donc $\boxed{\alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n + \alpha_q}$. Enfin, comme u_n est une probabilité, $u_n \leqslant 1$, donc $-\ln(u_n) \geqslant 0$, donc $\boxed{\alpha_n \geqslant 0 \text{ pour tout } n.}$

6. Soit un entier $q \geqslant 1$, on pose $\beta_q = \sup\{\alpha_r, 1 \leqslant r < q\}$. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant q$, on a

$$\frac{\alpha_k}{k} \leqslant \frac{\alpha_q}{q} + \frac{\beta_q}{k}.$$

Indication : on pourra utiliser la division euclidienne de k par q.

Correction

C'est une question déjà faite dans un précédent DS ! Soit $k \geqslant q$. Alors on écrit $k = qs + r$, avec $s \in \mathbb{N}$ et $r \in [\![0, q-1]\!]$. Ainsi,

$$\alpha_k \leqslant \alpha_{qs} + \alpha_r \leqslant s\alpha q + \alpha_r,$$

par sous-additivité. On en déduit que

$$\frac{\alpha_k}{k} \leqslant \frac{s\alpha_q}{k} + \frac{\alpha_r}{k}$$

Mais $qs \leqslant k$ donc $\dfrac{s}{k} \leqslant \dfrac{1}{q}$ et $\alpha_r \leqslant \beta_q$, donc

$$\boxed{\frac{\alpha_k}{k} \leqslant \frac{\alpha_q}{q} + \frac{\beta_q}{k}.}$$

7. En déduire que la suite $\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\inf\left\{\dfrac{\alpha_k}{k}, k \geqslant 1\right\}$.
On reviendra à la définition epsilonesque de la borne inférieure.

Correction

Notons $\ell = \inf\left\{\dfrac{\alpha_k}{k}, k \geqslant 1\right\}$. Déjà ℓ est un réel positif. Soit ensuite $\varepsilon > 0$. Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{\alpha_q}{q} \leqslant \ell + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Soit $k \geqslant q$. On sait que

$$\frac{\alpha_k}{k} \leqslant \frac{\alpha_q}{q} + \frac{\beta_q}{k} \leqslant \ell + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\beta_q}{k}$$

Comme $\dfrac{\beta_q}{k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, soit K_0 tel que pour tout $k \geqslant K_0$, $\dfrac{\beta_q}{k} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Soit $k \geqslant K_0$. Alors

$$\ell \leqslant \frac{\alpha_k}{k} \leqslant \ell + \varepsilon.$$

On a démontré que $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists K_0 \in \mathbb{N},\ \forall k \geqslant K_0,\ \left|\dfrac{\alpha_k}{k} - \ell\right| \leqslant \varepsilon.}$ Cela signifie exactement que $\dfrac{\alpha_k}{k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

8. Déduire des questions précédentes que la suite de terme général

$$-\frac{1}{n}\ln\left[\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)\right| \geqslant \varepsilon\right)\right]$$

admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$. Puis comparez ce résultat avec celui des questions préliminaires.

Correction

On sait que $\dfrac{\alpha_k}{k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}_+$, ce qui signifie que

$$-\frac{1}{n}\ln\left[\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right| \geqslant \varepsilon\right)\right] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Si $\ell \neq 0$, ce résultat est plus fort que celui de la question 1, car, s'il permet toujours de dire que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il permet de quantifier à quel point cette quantité tend vers 0. On sait que

$$\ln\left[\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right| \geqslant \varepsilon\right)\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} -n\ell,$$

ce qui assure presque une décroissance exponentielle vers 0.
Si $\ell = 0$, il faudrait avoir un équivalent en n de la quantité pour pouvoir dire quelque chose de pertinent !

C. Cas borné

Pour finir, on suppose que X est à valeurs dans un intervalle $[a, b]$. On note toujours μ son espérance.

9. Soit Y une variable aléatoire centrée, à valeurs dans $[-1, 1]$. Démontrer que pour tout $\gamma \in [-1, 1]$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{t\gamma} \leqslant \frac{1}{2}(1-\gamma)e^{-t} + \frac{1}{2}(1+\gamma)e^{t},$$

puis en déduire que

$$\mathbb{E}(e^{tY}) \leqslant \mathrm{ch}(t).$$

On admet que, par une étude de fonctions, $\mathrm{ch}(t) \leqslant e^{\frac{t^2}{2}}$. On a donc

$$\mathbb{E}(e^{tY}) \leqslant e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Correction

Déjà, par convexité de l'exponentielle,

$$\mathrm{e}^{t\gamma} = \mathrm{e}^{-t\times\frac{1}{2}(1-\gamma)+t\times\frac{1}{2}(1+\gamma)} \leqslant \frac{1}{2}(1-\gamma)\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}(1+\gamma)\mathrm{e}^{t},$$

car $\frac{1}{2}(1-\gamma)+\frac{1}{2}(1+\gamma)=1$. Ainsi, pour tout ω dans Ω,

$$\mathrm{e}^{tY(\omega)} \leqslant \frac{1}{2}(1-Y(\omega))\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}(1+Y(\omega))\mathrm{e}^{t}$$

Par croissance de l'espérance,

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tY}) \leqslant \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}(1-Y)\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}(1+Y)\mathrm{e}^{t}\right] = \frac{\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{t}}{2},$$

car Y est centrée, donc d'espérance nulle.

10. En considérant $Y = \dfrac{X-\mu}{b-a}$, vérifier que Y est centrée et à valeurs dans $[-1,1]$ et en déduire que pour tout t réel,

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t(X-\mu)}) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{t^2(b-a)^2}{2}}.$$

Correction

Déjà, comme $\mathbb{E}(X)=\mu$, $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{b-q}\mathbb{E}(X-\mu) = 0$, donc Y est centrée. Ensuite, comme $a \leqslant X \leqslant b$, $a-\mu \leqslant X-\mu \leqslant b-\mu$, $-(b-a) \leqslant -(\mu-a) \leqslant 0$ et $b-\mu \leqslant b-a$, donc $\dfrac{X-\mu}{b-a} \in [-1,1]$.
Donc, par la question précédente, pour tout $t>0$,

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\frac{X-\mu}{b-a}}\right) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}.}$$

En posant $s = \dfrac{t}{b-a}$, et comme $t \mapsto \dfrac{t}{b-a}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que pour tout $s>0$,

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{s(X-\mu)}\right) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{(b-a)^2s^2}{2}}.}$$

11. Soit $\varepsilon>0$. En utilisant le résultat de la question précédente, appliquée à la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)$, et en choisissant un t convenable, montrer que

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu) \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2\,(b-a)^2}\right),$$

puis majorer $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)\right| \geqslant \varepsilon\right)$. Comparer avec le résultat de la question 8.

Correction

On remarque que si $t > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu) \geqslant \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(t\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu) \geqslant tn\varepsilon\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\exp\left(t\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)\right) \geqslant \mathrm{e}^{tn\varepsilon}\right) \\
&\leqslant \frac{\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{t(X_k-\mu)}\right)}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}} \\
&\leqslant \prod_{k=1}^{n}\frac{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t(X_k-\mu)})}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}} \text{ par indépendance de } X_1,\dots,X_n \\
&\leqslant \mathrm{e}^{n\frac{t^2(b-a)^2}{2}-tn\varepsilon}.
\end{aligned}$$

On essaie alors de minimiser le polynôme $Q(t) = n\dfrac{t^2(b-a)^2}{2} - tn\varepsilon$. Son minimum est atteint en $\dfrac{\varepsilon}{2\frac{(b-a)^2}{2}} = \dfrac{\varepsilon}{(b-a)^2}$, et vaut

$$Q\left(\frac{\varepsilon}{(b-a)^2}\right) = n\frac{\varepsilon^2}{2(b-a)^2} - n\frac{\varepsilon^2}{(b-a)^2} = -n\frac{\varepsilon^2}{2(b-a)^2}.$$

Ceci nous permet d'obtenir la majoration désirée : elle est plus forte que la limite précédente, étant donné qu'elle permet de « passer les équivalents à l'exponentielle » .

Problème 2. Étude d'une équation fonctionnelle

L'objet de ce problème est de résoudre dans certains cas l'équation fonctionnelle suivante :

$$f(x) - \int_0^x (x-t)f(t)dt = g(x), \tag{1}$$

où f est une fonction inconnue supposée continue sur $\mathbb{R}$ et g est une fonction donnée définie sur $\mathbb{R}$.

A. Cas où $g \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Dans cette partie seulement, on suppose que la fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée seconde continue.

12. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que si f est solution de (1), alors f est deux fois dérivable et que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - f(x) = g''(x). \tag{2}$$

Préciser aussi la valeur de $f(0)$ et de $f'(0)$.

Correction

Supposons que f est une solution de (1).
Alors pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt + g(x), \tag{3}$$

Or, on a vu que $x \mapsto \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)dt$ était dérivable, on sait que g est dérivable, donc f est dérivable et pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = \int_0^x f(t)dt + g'(x),$$

mais $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ est dérivable, et g' est dérivable, donc f' est dérivable et pour tout x réel,

$$\boxed{f''(x) = f(x) + g''(x)},$$

donc f est deux fois dérivable et $f'' - f = g''$.
De plus, $\boxed{f(0) = \displaystyle\int_0^0 (0-t)f(t)dt + g(0) = g(0)}$, et, par la première question,

$$\boxed{f'(0) = \int_0^0 f(t)dt + g'(0) = g'(0).}$$

13. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que si f vérifie

$$\begin{cases} f'' - f = g'' \\ f(0) = g(0) \\ f'(0) = g'(0) \end{cases}$$

alors f est solution de (1).

Correction

Déjà, on sait que pour tout t dans $\mathbb{R}$, $f''(t) = f(t) + g''(t)$, donc, si $x \in \mathbb{R}$, en intégrant entre 0 et x, on obtient

$$\int_0^x f''(t)dt = \int_0^x f(t)dt + \int_0^x g''(t)dt,$$

donc

$$f'(x) - f'(0) = \int_0^x f(t)dt + g'(x) - g'(0).$$

Mais $f'(0) = g'(0)$ et, si $\varphi : x \mapsto \int_0^x (x-t)f(t)dt$, on a montré que $\varphi' : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$, donc pour tout t dans $\mathbb{R}$,

$$f'(t) = \varphi'(t) + g'(t),$$

donc, en intégrant entre 0 et x,

$$f(x) - f(0) = \varphi(x) - \varphi(0) + g(x) - g(0).$$

Mais $f(0) = g(0)$ et $\varphi(0) = 0$, donc

$$\boxed{f(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt + g(x),}$$

d'où le résultat désiré !

14. En déduire l'ensemble des solutions de (1) lorsque g est nulle.

Correction

On suppose que g est nulle. Soit f solution de (1). Alors

$$f'' - f = 0,$$

donc, en résolvant l'équation $y'' - y = 0$, d'équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$, on sait que l'on dispose de λ et μ dans $\mathbb{R}^2$ tels que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}$.
Or, comme f vérifie (1),

$$f(0) = 0 + g(0) = 0,$$

et

$$f'(0) = 0 + g'(0) = 0,$$

donc f est la fonction nulle ! $\boxed{\text{La seule solution de (1) est la fonction nulle.}}$

15. Démontrer que, pour une fonction g quelconque, l'équation (1) admet au plus une solution.

Correction

Soient f_1 et f_2 deux solutions de (1). Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors

$$f_1(x) - \int_0^x (x-t)f_1(t)dt = g(x) = f_2(x) - \int_0^x (x-t)f_2(t)dt,$$

donc

$$(f_1 - f_2)(x) = \int_0^x (x-t)(f_1 - f_2)(t)dt \text{ par linéarité de l'intégrale}$$

Donc $f_1 - f_2$ est solution de (1) avec g la fonction nulle. Donc, par la question précédente, $f_1 - f_2$

est identiquement nulle.
$\boxed{\text{Donc } f_1 = f_2\text{, donc l'équation admet une unique solution.}}$

16. Déterminer l'unique solution de (1) lorsque $g : x \mapsto \mathrm{e}^x$.

Correction

Résolvons l'équation différentielle $y'' - y = \mathrm{e}^x$.
Nous l'avons déjà vu, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\{x \mapsto \lambda \mathrm{e}^x + \mu \mathrm{e}^{-x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Ensuite, il nous faut trouver une solution particulière de l'équation différentielle. Comme le second membre est de la forme $x \mapsto K\mathrm{e}^{\alpha x}$ avec $\alpha = 1$, racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme $h : x \mapsto Kx\mathrm{e}^x$, avec $K \in \mathbb{R}$. Alors

$$h' : x \mapsto K\mathrm{e}^x + Kx\mathrm{e}^x,$$

et

$$h'' : x \mapsto 2K\mathrm{e}^x + Kx\mathrm{e}^x.$$

Alors on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} h \text{ est solution de (2)} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ h''(x) - h(x) = \mathrm{e}^x \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 2K\mathrm{e}^x + Kx\mathrm{e}^x - Kx\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 2K\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \\ &\Leftrightarrow K = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Donc une solution particulière de l'équation est $x \mapsto \dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^x$.
Donc, si f est solution de (1), alors on dispose de λ et μ dans $\mathbb{R}$ tels que

$$f : x \mapsto \lambda \mathrm{e}^x + \mu \mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}x\mathrm{e}^x.$$

Or, $f(0) = g(0) = 1$ donc $\lambda + \mu = 1$.
De plus, $f'(0) = g'(0) = 1$, donc

$$\lambda - \mu + \frac{1}{2} = 1,$$

donc

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda - \mu = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Donc $\lambda = \dfrac{3}{4}$ et $\mu = \dfrac{1}{4}$. Donc par existence et unicité de la solution de (1), la solutionde (1) est

$$\boxed{f : x \mapsto \frac{3}{4}\mathrm{e}^x + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}x\mathrm{e}^x.}$$

17. Démontrer que, dans le cas général, pour tous λ et μ dans $\mathbb{R}$, la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{2}\left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t} g''(t)dt + \lambda\right) - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t} g''(t)dt + \mu\right)$$

est solution de (2). En déduire l'uniqe solution de (1).

Correction

Soient λ et μ dans $\mathbb{R}$ et

$$f : x \mapsto \frac{e^x}{2}\left(\int_0^x e^{-t}g''(t)dt + \lambda\right) - \frac{e^{-x}}{2}\left(\int_0^x e^{t}g''(t)dt + \mu\right).$$

Alors f est dérivable et

$$\begin{aligned} f' : x \mapsto & \frac{e^x}{2}\left(\int_0^x e^{-t}g''(t)dt + \lambda\right) + \frac{e^x}{2}e^{-x}g''(x) + \frac{e^{-x}}{2}\left(\int_0^x e^{t}g''(t)dt + \mu\right) - \frac{e^{-x}}{2}e^{x}g''(x) \\ & = \frac{e^x}{2}\left(\int_0^x e^{-t}g''(t)dt + \lambda\right) + \frac{e^{-x}}{2}\left(\int_0^x e^{t}g''(t)dt + \mu\right), \end{aligned}$$

et

$$f'' : x \mapsto \frac{e^x}{2}\left(\int_0^x e^{-t}g''(t)dt + \lambda\right) + \frac{e^x}{2}e^{-x}g''(x) - \frac{e^{-x}}{2}\left(\int_0^x e^{t}g''(t)dt + \mu\right) + \frac{e^{-x}}{2}e^{x}g''(x),$$

donc pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$f''(x) = f(x) + g''(x),$$

donc f est solution de (2). De plus, si f est solution de (1), alors $f(0) = g(0)$ et $f'(0) = g'(0)$. Donc

$$\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu = g(0)$$

et

$$\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\mu = g'(0),$$

donc $\lambda = g(0) + g'(0)$ et $\mu = g(0) - g'(0)$. Finalement, par existence et unicité de la solution de (1), LA solution de (1) est

$$\boxed{x \mapsto \frac{e^x}{2}\left(\int_0^x e^{-t}g''(t)dt + g(0) + g'(0)\right) - \frac{e^{-x}}{2}\left(\int_0^x e^{t}g''(t)dt + g(0) - g'(0)\right)}$$

B. Cas où g est seulement continue

On suppose désormais que g est seulement continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On note $A : f \mapsto A(f)$ l'application de E dans E définie par, pour toute f dans E,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ A(f)(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt.$$

18. Démontrer que A est un endomorphisme injectif.

Correction

Soient f et g dans E, λ et μ dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} A(\lambda f + \mu g)(x) &= \int_0^x (x-t)(\lambda f(t) + \mu g(t))dt \\ &= \int_0^x \lambda(x-t)f(t) + \mu(x-t)g(t)dt \\ &= \lambda \int_0^x (x-t)f(t)dt + \mu \int_0^x (x-t)g(t)dt \text{ par linéarité de l'intégrale} \\ &= \boxed{\lambda A(f)(x) + \mu A(g)(x)}, \end{aligned}$$

d'où le résultat !
Soit $f \in \ker(A)$. Alors pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt = 0.$$

En dérivant deux fois cette expression, on obtient le résultat : f est la fonction nulle. $\boxed{\text{Donc } A \text{ est injective.}}$

On note $U : f \mapsto U(f)$ l'application de E dans E définie par, pour toute f dans E,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ U(f)(x) = \int_0^x \mathrm{sh}(x-t)f(t)dt.$$

On admet que U est un endomorphisme de E.

19. Soit $f \in E$. Démontrer que $A(f)$ et $U(f)$ sont deux fois dérivables et trouver des expressions simples de $A(f)''$ et $U(f)''$.

Correction

On a vu dans la question préliminaire 1 que pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$A(f)'(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

donc $A(f)$ est deux fois dérivable et pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\boxed{A(f)''(x) = f(x)}$.
Ensuite, pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} U(f)(x) &= \int_0^x \mathrm{sh}(x-t)f(t)dt \\ &= \mathrm{sh}(x)\int_0^x \mathrm{ch}(t)f(t)dt - \mathrm{ch}(x)\int_0^x \mathrm{sh}(t)f(t)dt. \end{aligned}$$

Donc α est dérivable et

$$\begin{aligned} U(f)'(x) &= \mathrm{ch}(x)\int_0^x \mathrm{ch}(t)f(t)dt + \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x)f(x) - \mathrm{sh}(x)\int_0^x \mathrm{sh}(t)f(t)dt - \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(x)f(x)\\ &= \mathrm{ch}(x)\int_0^x \mathrm{ch}(t)f(t)dt - \mathrm{sh}(x)\int_0^x \mathrm{sh}(t)f(t)dt. \end{aligned}$$

Donc α' est dérivable et

$$\begin{aligned} U(f)''(x) &= \mathrm{sh}(x)\int_0^x \mathrm{ch}(t)f(t)dt + \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(x)f(x) - \mathrm{ch}(x)\int_0^x \mathrm{sh}(t)f(t)dt - \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(x)f(x)\\ &= \mathrm{sh}(x)\int_0^x \mathrm{ch}(t)f(t)dt - \mathrm{ch}(x)\int_0^x \mathrm{sh}(t)f(t)dt + (\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x))f(x)\\ &\boxed{= U(f)(x) + f(x).} \end{aligned}$$

20. Soit $f \in E$. On note $\alpha = U \circ A(f)$, $\beta = A \circ U(f)$ et $\gamma = U(f) - A(f)$. Démontrer que $\alpha = \beta = \gamma$.

Correction

- Déjà, pour tout x dans $\mathbb{R}$, α est deux fois dérivable et, par la question précédente, pour tout x dans $\mathbb{R}$,
$$\alpha''(x) = \alpha(x) + A(f)(x).$$
- Ensuite, toujours par la question précédente, β est deux fois dérivable et, pour tout x dans $\mathbb{R}$,
$$\beta''(x) = U(f)(x).$$
- Enfin, pour tout x dans $\mathbb{R}$, γ est deux fois dérivable et, pour tout x dans $\mathbb{R}$,
$$\gamma''(x) = U(f)(x) + f(x) - f(x).$$
Donc $\gamma''(x) = U(f)(x)$, ou bien $\gamma''(x) = U(f)(x) - A(f)(x) + A(f)(x) = \gamma(x) + A(f)(x)$.

Ensuite, on remarque que $\alpha(0) = \beta(0) = \gamma(0) = \alpha'(0) = \beta'(0) = \gamma'(0) = 0$.
Et c'est là qu'intervient un très, très joli argument ! Soient les problèmes de Cauchy suivants

$$(E)\begin{cases} y'' = U(f)(x)\\ y(0) = 0\\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{et } (E')\begin{cases} y'' = y + A(f)(x)\\ y(0) = 0\\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Alors, α et γ sont solutions de (E') donc par unicité des solutions d'un problème de Cauchy, sont égales. De plus, β et γ sont solutions de (E) donc par unicité des solutions d'un problème de Cauchy, sont égales.
Donc $\alpha = \beta = \gamma$.

21. Démontrer que les applications

$$\mathrm{Id}_E - A : \left| \begin{array}{l} E \to E\\ f \mapsto f - A(f) \end{array}\right. \quad \text{et } \mathrm{Id}_E + U : \left| \begin{array}{l} E \to E\\ f \mapsto f + U(f) \end{array}\right.$$

sont des bijections de E dans E, réciproques l'une de l'autre.
En déduire la solution générale du problème (1).

Correction

Soit f dans E. Alors

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id}_E - A)\circ(\mathrm{Id}_E + U)(f) &= (\mathrm{Id}_E - A)(f + U(f))\\ &= f + U(f) - A(f) - A\circ U(f)\\ &= f + U(f) - A(f) - (U(f) - A(f)) = f = \mathrm{Id}_E(f).\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id}_E + U)\circ(\mathrm{Id}_E - A)(f) &= (\mathrm{Id}_E + U)(f - A(f))\\ &= f - A(f) + U(f) - U\circ A(f)\\ &= f - A(f) + U(f) - (U(f) - A(f)\\ &= f = \mathrm{Id}_E(f),\end{aligned}$$

donc $(\mathrm{Id}_E - A)\circ(\mathrm{Id}_E + U) = (\mathrm{Id}_E + U)\circ(\mathrm{Id}_E - A) = \mathrm{Id}_E$, donc ces applications sont des bijections réciproques l'une de l'autre.
Or, si $f \in E$, f est solution de (1) si, et seulement si $f - A(f) = g$.
Or, on a les équivalences

$$f - A(f) = g \Leftrightarrow (\mathrm{Id}_E - A)(f) = g \Leftrightarrow f = (\mathrm{Id}_E + U)(g),$$

donc la solution de (1) est

$$\boxed{x \mapsto g(x) + \int_0^x \mathrm{sh}(x-t)g(t)dt.}$$

C. Convergence de la somme des itérés de A

On désigne par A_n la n-ième itérée de l'application A :

$$A_2(f) = A(A(f)),\ \ldots, A_n(f) = A(A_{n-1}(f)).$$

22. Démontrer que pour toute f dans E, pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$A_n(f)(x) = \int_0^x \frac{1}{(2n+1)!}(x-t)^{2n+1}f(t)dt.$$

On note, si $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = A + A_2 + \cdots + A_n,$$

c'est-à-dire que pour toute fonction f dans E,

$$U_n(f) = A(f) + A_2(f) + \cdots + A_n(f).$$

23. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\mathrm{sh}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \int_0^x \mathrm{ch}(t)\frac{(x-t)^{2n}}{2n!}dt.$$

24. En déduire que pour tout x dans $\mathbb{R}$, pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a

$$\left|\mathrm{sh}(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\right| \leqslant \frac{\mathrm{ch}(u).|u|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Conclure ainsi que pour tout réel x,

$$|U(f)(x) - U(n)(f)(x)| \leqslant \frac{\mathrm{ch}(x).|x|^{2n}}{(2n)!} \left| \int_0^x |f(t)| dt \right|$$

25. Retrouver le résultat de la question 20.

26. En utilisant les résultats des deux parties précédentes, et en faisant une analogie judicieuse, expliquer pourquoi le fait que $\mathrm{I} - A$ et $\mathrm{I} + U$ soient inverses est cohérent.