

Chapitre 26 – Déterminants

1 Déterminant d'une matrice

1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice à coefficients dans \mathbb{K} . On définit le déterminant de A , noté $\det(A)$,

ou $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, la quantité $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j), j}$.

1.2 Propriétés importantes

Notation 2

On notera indifféremment $\det(A)$ ou $\det(C_1, \dots, C_n)$ si C_1, \dots, C_n sont les colonnes de A . Ceci fait que le déterminant peut facilement être interprété comme une application de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})^n$ dans \mathbb{K} .

Proposition 3

L'application $C_1, \dots, C_n \mapsto \det(C_1, \dots, C_n)$ est une **forme n -linéaire alternée**, où ce vocabulaire est défini ci-dessous.

Définition 4

Soient E et F deux \mathbb{K} -ev, $p \in \mathbb{N}$.

1. Une **application p -linéaire** de E dans F est une application $f : \begin{matrix} E^p \rightarrow F \\ (x_1, \dots, x_p) \mapsto f(x_1, \dots, x_p) \end{matrix}$ telle que pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, pour tout $(x_i)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ i \neq k}} \in E^{p-1}$, l'application

$$g_k : \begin{matrix} E \rightarrow F \\ t \mapsto f(x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_p) \end{matrix} \text{ est linéaire.}$$

2. Une **forme p -linéaire** sur E est une application p -linéaire de E dans \mathbb{K} .
3. Une application p -linéaire est dite **alternée** si pour tout n -uplet (x_1, \dots, x_p) dans E^p , si deux éléments sont égaux, alors $f(x_1, \dots, x_p) = 0$.

Proposition 5

On a une équivalence entre caractère antisymétrique et caractère alterné pour une application p -linéaire.

Proposition 6 (Conséquences de la proposition précédente)

1. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
2. Si A n'est pas inversible, alors $\det(A) = 0$.

Lemme 7 (Lemme technique)

Soit g une forme n -linéaire alternée sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors

1. pour toute transposition τ , $g(X_{\tau(1)}, \dots, X_{\tau(n)}) = -g(X_1, \dots, X_n)$,
2. pour toute permutation σ , $g(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)g(X_1, \dots, X_n)$,
3. $g = g(I_n) \cdot \det$.

Proposition 8 (Propriétés calculatoires du déterminant.)

1. $\det(A) = \det(A^T)$
2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
3. (déterminant par blocs : HP en sup) Si $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_s(\mathbb{K})$ sont des matrices carrées, si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{s,r} & D \end{pmatrix}$, alors $\det(M) = \det(A)\det(D)$.
4. Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des coefficients diagonaux.
5. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$.

2 Méthodes de calcul du déterminant

2.1 Opérations élémentaires

Proposition 9

Soit A une matrices de colonnes C_1, \dots, C_n , λ un réel.

- (i) (permutations) $\det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n) = -\det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = -\det(A)$.
- (ii) (transvections) $\det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j + \lambda C_i, \dots, C_n) = \det(A)$.
- (iii) (dilatations) $\det(C_1, \dots, \lambda C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = \lambda \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = \lambda \det(A)$.

Remarque 10

Comme $\det(A) = \det(A^T)$, les opérations sur les lignes ont le même effet sur le déterminant.

2.2 Développement selon une ligne/une colonne

Définition 11

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- (i) Le mineur de position (i, j) dans A , noté Δ_{ij} (si A est déjà fixée) est le scalaire défini comme le déterminant de la matrice $(a_{k,\ell})_{k \neq i, \ell \neq j}$.

Précisément, $\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$.

- (ii) Le cofacteur de position (i, j) dans A est le scalaire $(-1)^{i+j} \Delta_{ij}$.

Proposition 12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

(i) (développement selon une ligne) $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$.

(ii) (développement selon une colonne) $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$.

3 Déterminant d'une famille de vecteurs et d'un endomorphisme

Définition 13

Soit E un \mathbb{K} -evdf, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$. On définit le déterminant dans la base \mathcal{E} de (u_1, \dots, u_n) comme $\det_{\mathcal{E}}(u_1, \dots, u_n) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{E}}(u_1, \dots, u_n))$.

Proposition 14

Soit E un \mathbb{K} -evdf, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

1. $(u_1, \dots, u_n) \mapsto \det_{\mathcal{E}}(u_1, \dots, u_n)$ est une forme n -linéaire alternée.
2. si f est une forme n -linéaire alternée sur E , alors $f = f(e_1, \dots, e_n) \times \det_{\mathcal{E}}$

Proposition 15

Soit E un evdf n , \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E , $\mathcal{E} = (X_1, \dots, X_n)$ une famille de n vecteurs de E .

- (i) $\det_{\mathcal{B}}(X_1, \dots, X_n) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(X_1, \dots, X_n)$.
- (ii) \mathcal{E} est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{E}) \neq 0$. Dans ce cas, $\det_{\mathcal{E}}(\mathcal{B}) = \frac{1}{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{E})}$.

Définition 16 (et proposition)

Soit E un \mathbb{K} -evdf, $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\det(\text{Mat}_{\mathcal{E}}(u))$ ne dépend pas du choix de la base \mathcal{E} dans laquelle on représente u . On appelle cette quantité déterminant de u et on la note $\det(u)$.

Proposition 17

Soient u et v dans $\mathcal{L}(E)$, E evdf. Alors

- (i) pour toute base \mathcal{B} de E et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det(u) \times \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.
- (ii) $\det(\text{Id}_E) = 1$.
- (iii) si $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$.
- (iv) $\det(u \circ v) = \det(u) \det(v)$.
- (v) u est inversible ssi $\det(u) \neq 0$ et alors $\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det(u)}$.

4 Points plus théoriques

4.1 Déterminant de Vandermonde

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$.

Définition 18

On appelle matrice de Vandermonde associée aux réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de Vandermonde de $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est le déterminant de cette matrice.

Proposition 19

1. La matrice de Vandermonde associée à $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est inversible si et seulement si les réels $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ sont deux à deux distincts.

2. Son déterminant vaut $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$.

4.2 Matrices extraites et comatrice

Proposition 20

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\text{rg}(M)$ est la taille de la plus grande matrice carrée de déterminant non nul extraite de M .

Définition 21

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit la comatrice de A comme la matrice formée des cofacteurs de A . On la note $\text{Com}(A)$.

Donc $\text{Com}(A) = ((-1)^{i+j} \Delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ où Δ_{ij} est le déterminant de la matrice A à laquelle on a retiré la ligne i et la colonne j .

Proposition 22

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $A \times \text{Com}(A)^T = \det(A)I_n$.

4.3 Formules de Cramer (HP)

Définition 23

Un système linéaire $AX = b$, de matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de second membre $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est dit de Cramer s'il admet une unique solution.

Proposition 24

Soit $AX = b$ un système de Cramer, (C_1, \dots, C_n) les colonnes de A . Alors l'unique solution de ce système est $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ où, pour tout k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, $x_k = \frac{\det(C_1, \dots, C_{k-1}, b, C_{k+1}, \dots, C_n)}{\det(A)}$.