N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Chapitre 24 – Applications linéaires et matrices

1 Une matrice est une application linéaire

Définition 1 (Rappel)

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit $f_A : \left| \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$, l'application linéaire canoniquement associée à A. On définit, via f_A, le noyau, l'image, le rang de A.

Proposition 2 (Adaptation des résultats déjà connus)

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. Théorème du rang : $\dim(\ker(A)) + \mathrm{rg}(A) = p$.
2. Inégalités sur le rang : $\mathrm{rg}(A) \leqslant \min(n,p)$ et $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \min(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B))$.
3. Si $n = p$, A est inversible à gauche ssi A est inversible à droite ssi A est inversible.
4. On a un isomorphisme $F : \left| \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{L}(\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})) \\ A & \mapsto & f_A \end{array} \right.$.

2 Une application linéaire... est une (des) matrice(s)

Définition 3

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, x un vecteur de E, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. La matrice de x dans $\mathcal{E}$ est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
2. Soient $(y_1, \dots, y_p)$ p vecteurs de E. Alors pour tout k dans $[\![1, p]\!]$, il existe un unique n-uplet $(a_{ik})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ tel que $y_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i$. On appelle matrice dans la base $\mathcal{E}$ de $(y_1, \dots, y_p)$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(y_1, \dots, y_p) = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.

Proposition 4

Soit E un $\mathbb{K}$-evdf n, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit p dans $\mathbb{N}^*$.

L'application $\varphi : \left| \begin{array}{rcl} E^p & \to & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ (X_1, \dots, X_p) & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(X_1, \dots, X_p) \end{array} \right.$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Définition 5

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-evdf, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{F}$ une base de F, $u \in \mathscr{L}(E, F)$. La matrice de l'application u dans la base $\mathcal{E}$ au départ et $\mathcal{F}$ à l'arrivée, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$ est la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$. Lorsque u est un endomorphisme et que l'on choisit la même base au départ et à l'arrivée, on notera le plus souvent $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Proposition 6

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $\mathcal{F}$ celle de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f_A) = A$.

Proposition 7

Soient E et F deux espaces vectoriels, de dimensions respectives p et n, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F.

L'application $\Phi : \left| \begin{array}{rcl} \mathscr{L}(E,F) & \to & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) \end{array} \right.$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels

Proposition 8

Soient E, F et G deux espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et $\mathbb{G}$, soit et $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors

1. $\forall u \in \mathscr{L}(E,F)$, $\forall x \in E$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(u(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(x)$
2. $\forall u \in \mathscr{L}(E,F), \forall v \in \mathscr{L}(F,G)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$.

Corollaire 9

Soit (E,F) deux $\mathbb{K}$-ev de même dimension p, $\mathcal{E}$ une base de E, $\mathcal{F}$ une base de F, $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors u est inversible si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$ est inversible. On a alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(u^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)^{-1}$.

Proposition 10

Soit E un espace vectoriel de dimension n, de base $\mathcal{E}$, alors l'application $\Phi : \left| \begin{array}{rcl} \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ u & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) \end{array} \right.$ est un isomorphisme d'algèbres, ce qui signifie qu'on a de plus $\Phi(u \circ v) = \Phi(u) \circ \Phi(v)$.

Proposition 11 (Matrices de symétries/projecteurs « dans une bonne base »)

Soit E un $\mathbb{K}$-evdf n, $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Si u est un projecteur de E, soit $r = \mathrm{rg}(u)$, $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}(u)$, $(f_{r+1}, \dots, f_n)$ une base de $\ker(u)$. Comme u est un projecteur, $\mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u) = E$ et donc $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, f_{r+1}, \dots, f_n)$ est une base de E. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$.
2. Si u est une symétrie de E, $\ker(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(u + \mathrm{Id}_E) = E$. Soit $(e_1, \dots, e_s)$ base de $\ker(u - \mathrm{Id}_E)$ et $(f_{s+1}, \dots, d_n)$ une base de $\ker(u + \mathrm{Id}_E)$.
   Alors $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_s, f_{s+1} \dots, f_n)$ est une base de E, et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_s & 0_{s,n-s} \\ 0_{n-s,s} & -\mathrm{I}_{n-s} \end{pmatrix}$.

3 Changement de base, équivalence, similitude

3.1 Matrice de passage d'une base à une autre

Proposition 12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une famille de n vecteurs de E. Alors $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F})$ est inversible. Dans ce cas, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F})^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E})$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Définition 13

Soient E un espace vectoriel, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases de E. La matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$, notée $P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}$ ou $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$ est la matrice de la famille $\mathcal{E}'$ dans la famille $\mathcal{E}$: $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}')$.

Proposition 14

Soit E un $\mathbb{K}$-evdf, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases de E.

1. Si $x \in E$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(x)$, $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(x)$. Alors $X = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} X'$.
2. De même, si $(x_1, \dots, x_p)$ sont p vecteurs, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(x_1, \dots, x_p) = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(x_1, \dots, x_p)$.

Proposition 15

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-evdf, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ deux bases de E, $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ deux bases de F.

1. $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(\mathrm{Id}_E)$
2. $P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}} = (P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'})^{-1}$
3. si F est un espace vectoriel $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux bases de F, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(u) = P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$.
4. Si $\varphi \in \mathscr{L}(E)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(u) = P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$.

3.2 Matrices équivalentes et rang

Définition 16 (et proposition)

Deux matrices A et B de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites équivalentes s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que $A = PBQ$. On définit une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Proposition 17

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-evdf, $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $\mathcal{E}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une base de F. Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$. Soit $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors A et B sont équivalentes si et seulement s'il existe $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}'$ deux bases de E et de F telles que $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(u)$.

Définition 18

Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, avec $r \leqslant \min(n, p)$. On définit $J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$.

Proposition 19

Soient (E, F) deux $\mathbb{K}$-evdf, $n = \dim(E)$, $p = \dim(F)$. Soit $r \in \mathbb{N}$, $r \leqslant \min(n, p)$.
Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors u est de rang r si, et seulement s'il existe $\mathcal{E}$ une base de E, $\mathcal{F}$ une base de F, telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = J_{p,n,r}$.

Proposition 20

1. Soit $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $r \in \mathbb{N}$, $r \leqslant \min(n, p)$. Alors A est de rang r si et seulement si A est équivalente à $J_{p,n,r}$. On a donc $r + 1$ classes d'équivalences de matrices.
2. Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles sont de même rang.
3. Soient (E, F) deux $\mathbb{K}$-evdf, $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors, pour toutes bases $\mathcal{E}$ de E et $\mathcal{F}$ de F, $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u))$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

4. Soit F un $\mathbb{K}$-evdf n, $(x_1, \dots, x_p)$ p vecteurs de F, $\mathcal{F}$ une base de F. Alors $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(x_1, \dots, x_p))$.
5. Une matrice carrée de taille N est inversible si, et seulement si elle est de rang n.
6. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top)$. Le rang de A est donc le rang des colonnes ou des lignes de A.

Proposition 21 (Interprétation du pivot de Gauss)

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

1. Si B est obtenue à partir de A, à l'aide d'opérations sur les lignes et/ou sur les colonnes, alors A et B sont équivalentes.
2. si $\mathrm{rg}(A) = r$, alors on peut obtenir $J_{p,n,r}$ à l'aide d'opérations sur les lignes/les colonnes de A.

Définition 22

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Une matrice extraite de A est une matrice $B = (a_{ij})_{i\in \mathrm{I}, j\in J}$, où $\mathrm{I} \subset [\![1, n]\!]$ et $J \subset [\![1, p]\!]$.

Proposition 23

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{rg}(A)$ est la taille de la plus grande matrice carrée inversible extraite de A.

3.3 Matrices semblables et trace

Définition 24 (et proposition)

Deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s'il existe une matrice P dans $GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$. On définit une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 25

1. Si A et B sont semblables, alors A et B sont équivalentes.
2. Si A est semblable à $\lambda \mathrm{I}_n$, alors $A = \lambda \mathrm{I}_n$.
3. Si $A = PBP^{-1}$ avec $P \in GL_n(\mathbb{K})$, alors pour tout k dans $\mathbb{N}$, $A^k = PB^kP^{-1}$.

Proposition 26

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{E}$ une base de E. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$, $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A et B sont semblables si et seulement s'il existe $\mathcal{E}'$ une base de E telle que $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(u)$.

Proposition 27 (et définition)

1. Deux matrices semblables ont même trace.
2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$. La quantité $\mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{E}$ de E choisie. On appelle alors cette quantité trace de u, notée $\mathrm{Tr}(u)$.

Proposition 28

Soit p un projecteur d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E. Alors $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.