N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Chapitre 25 – Séries

1 Généralités

1.1 Séries convergentes, divergentes

Définition 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

1. La **série de terme général** (parfois abrégé en stg) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la **suite** $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On **note** parfois $\sum u_n$ la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. Si $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k$ est appelée n-ième somme partielle.
4. On dit que la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si $\sum_{k=0}^{n} u_k$ tend vers une limite finie ℓ. On note alors $\ell = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et on l'appelle « somme de la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ » .
Sinon, on dit qu'elle diverge.
5. Si la stg $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, le reste d'ordre n est $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Proposition 2

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ converge, alors $\sum \lambda u_n + \mu v_n$ converge.

Proposition 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $u_n = S_n - S_{n-1}$.
2. $\boxed{\text{Si}}$ la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ converge, $\boxed{\text{alors}}$ $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Définition 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, on dit que la stg $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge grossièrement**.

Proposition 5 (Séries géométriques)

Soit $a \in \mathbb{C}$. Alors

1. si $|a| \geqslant 1$, la série de terme général $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge grossièrement.
2. si $|a| < 1$, la série de terme général $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa somme vaut $\dfrac{1}{1-a}$.

 N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Proposition 6 (Lien suites-séries)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série de terme général $(a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

1.2 Séries à termes positifs

Proposition 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels **positifs** et, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors elle converge.
3. Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors pour tout n dans $\mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Proposition 8 (Théorèmes de comparaison des séries à termes positifs)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels **positifs**.

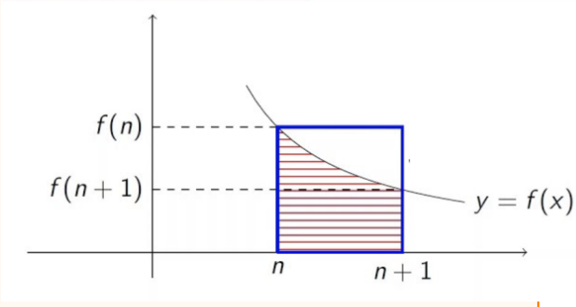
1. si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge,
2. si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge,
3. si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum v_n$ converge **si et seulement si** $\sum u_n$ converge.

2 Séries de Riemann et comparaison série-intégrale

Point de méthode 9

Soit f une fonction positive, décroissante. Alors, pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a les inégalités

$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)dt.$$



Ainsi, $\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)dt$,

ou encore $\int_1^{n+1} f(t)dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_0^{n} f(t)dt$.

Il s'agit bien d'une **méthode**, pas d'une proposition : il faudra toujours adapter à la situation.

Proposition 10 (Critère de convergence des séries de Riemann)

Soit $s \in \mathbb{R}$. Alors la série de terme général $\frac{1}{n^s}$ converge si et seulement si $s > 1$.

3 Séries à termes quelconques

3.1 Convergence absolue

Définition 11

Une série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument si la série de terme général $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Proposition 12

Une série qui converge absolument converge. (l'exemple ci-dessus montre que la réciproque est fausse)

Proposition 13 (Critère de D'Alembert)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite de complexes non nuls. On suppose que $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

1. Si $0 \leqslant \ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument, donc converge.
2. Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.

3.2 Séries alternées

Proposition 14 (Critère des séries alternées)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs, qui décroit et tend vers 0.
Alors la série de terme général $((-1)^n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.