N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

# Chapitre 27
# Göttingen, 1853 – Riemann rend son mémoire à Gauss (Intégration)

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
L'idée est, dans ce polycopié, de **construire l'intégrale**, à l'aide de la notion d'aire sous la courbe.
Il nous faut donc d'abord expliquer que l'on peut « approcher » une fonction par des fonctions dite **en escalier.**

## 1 Approximation uniforme de fonctions continues par morceaux

### 1.1 Fonctions continues par morceaux

**Définition 1**

Soient $a < b$ deux réels.

1. Une subdivision de $[a, b]$ est un ensemble fini $\sigma$ d'éléments de $[a, b]$ tel que si $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$, avec $x_0 < \dots < x_n$, $x_0 = a$ et $x_n = b$.
2. Si $\forall (i, j) \in [\![0, n-1]\!]^2$, $x_{i+1} - x_i = x_{j+1} - x_j$, on dit que la subdivision est régulière. Le pas de cette subdivision est $x_1 - x_0 = \dfrac{b-a}{n}$.

**Dans la suite, $a$ et $b$ désignent deux réels tels que $a < b$.**

**Définition 2**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$.

1. On dit que $f$ est continue par morceaux (cpm) sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma$ de $[a, b]$, $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ (avec $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$) telle que pour tout $i$ de $[\![0, n-1]\!]$,
   - $f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ est continue,
   - $f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ possède des limites finies en $x_i$ (à droite) et $x_{i+1}$ (à gauche).
2. Si $f$ est continue par morceaux, si $\sigma' = \{y_0, \dots, y_m\}$ est une subdivision de $[a, b]$, avec $a = y_0 < y_1 < \dots < y_n = b$, on dit que $\sigma'$ est adaptée à $f$ si pour tout $i$ de $[\![0, n-1]\!]$,
   - $f_{|]y_i, y_{i+1}[}$ est continue,
   - $f_{|]y_i, y_{i+1}[}$ possède des limites finies en $y_i$ et $y_{i+1}$.
3. Si $\mathrm{I}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, on dit que $f$ est continue par morceaux sur $\mathrm{I}$ si elle est continue par morceaux sur tout segment de $\mathrm{I}$.
4. On note $\mathscr{C}_{\mathrm{pm}}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $\mathrm{I}$ dans $\mathbb{K}$.

**Exemple 3**

La fonction partie entière est continue par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$, alors que si $f : x \mapsto \begin{cases} \tan(x) \text{ si } x \neq \dfrac{\pi}{2} [\pi] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$, $f$ n'est pas continue par morceaux sur $[0, \pi]$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

**Proposition 4**

Soit $f \in \mathscr{C}_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{K})$, $\sigma$ et $\sigma'$ deux subdivisions de $[a,b]$.

1. Si $\sigma$ est adaptée à $f$ et si $\sigma \subset \sigma'$, alors $\sigma'$ est adaptée à $f$.
2. Si $\sigma$ est adaptée à $f$, alors $\sigma \cup \sigma'$ est adaptée à $f$.

**Démonstration**

1. Notons $\sigma = \{x_0,\dots,x_n\}$, $a = x_0 < \cdots < x_n = b$, $\sigma' = \{y_0,\dots,y_m\}$, $a = y_0 < \cdots < y_m = b$.
Soit $i$ dans $[\![0,m-1]\!]$. Comme $\sigma \subset \sigma'$, on dispose de $j$ dans $[\![0,n-1]\!]$ tel que $[y_i,y_{i+1}] \subset [x_j,x_{j+1}]$.
*(penser au fait qu'il y a davantage de points dans $\sigma'$, donc de plus petits intervalles)*
Donc
   - $f_{|]y_i,y_{i+1}[}$ est continue car $f_{|]x_j,x_{j+1}[}$,
   - en $y_i$ :
     — si $y_i = x_j$, comme $f_{|]x_j,x_{j+1}[}$ admet une limite finie en $x_j$, $f_{|]y_i,y_{i+1}[}$ admet une limite finie en $y_i$,
     — sinon, $y_i \in ]x_j,x_{j+1}[$. Comme $f_{|]x_j,x_{j+1}[}$ est continue elle est continue en $y_i$, donc admet des limites finies à gauche et à droite en $y_i$, donc $f_{|]y_i,y_{i+1}[}$ admet une limite finie en $y_i$,
   - on fait de même en $y_{i+1}$.

   Donc $\sigma'$ est adaptée à $f$.
2. $\sigma \subset \sigma \cup \sigma'$ donc, comme $\sigma$ est adaptée à $f$, $\sigma \cup \sigma'$ est adaptée à $f$.

■

**Proposition 5**

$\mathscr{C}_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{[a,b]}$.

**Démonstration**

Déjà, La fonction nulle est $\mathscr{C}_{\text{pm}}$. Ensuite, soient $(f,g) \in \mathscr{C}_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{K})^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
Soit $\sigma$ une subdivision adaptée à $f$, $\sigma'$ une subdivision adaptée à $g$.
Alors $\sigma \cup \sigma'$ est adaptée à $f$ et à $g$.
Donc si $\sigma \cup \sigma' = \{x_0,\dots,x_n\}$, avec $a = x_0 < \cdots < x_n = b$, pour tout $i$ dans $[\![0,n-1]\!]$, $(\lambda f + g)_{|]x_i,x_{i+1}[}$

- est continue car $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ et $g_{|]x_i,x_{i+1}[}$ le sont,
- possède une limite finie en $x_i$ et en $x_{i+1}$ car $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ et $g_{|]x_i,x_{i+1}[}$ possèdent une limite finie en $x_i$ et en $x_{i+1}$.

Donc $\lambda f + g \in \mathscr{C}_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{K})$. D'où la structure d'espace vectoriel. ■

## 1.2 Fonctions en escalier

**Définition 6**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$.

1. On dit que $f$ est en escalier sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma$ de $[a,b]$, $\sigma = \{x_0,\dots,x_n\}$ tel que $\forall i \in [\![0,n-1]\!]$, $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ est constante.
2. Si $f$ est en escalier, une subdivision $\sigma' = \{y_0,\dots,y_m\}$ avec $a = y_0 < y_1 < \dots, y_m = b$ est dite adaptée à $f$ si pour tout $i$ dans $[\![0,m-1]\!]$, $f_{|]y_i,y_{i+1}[}$ est constante.
3. Si $\mathrm{I}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, on dit que $f$ est en escalier sur $\mathrm{I}$ si elle l'est sur tout segment de $\mathrm{I}$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

**Remarque 7**

1. La partie entière est en escalier sur $\mathbb{R}$.
2. **ATTENTION !** La valeur de la fonction en $x_i$ peut être complètement arbitraire.

**Proposition 8**

1. Si $f$ est en escalier sur $[a, b]$, si $\sigma$ est adaptée à $f$, alors pour toute subdivision $\sigma'$,
   (a) si $\sigma \subset \sigma'$, alors $\sigma'$ est adaptée à $f$,
   (b) si $\sigma'$ est quelconque, $\sigma \cup \sigma'$ est adaptée à $f$.
2. L'ensemble des fonctions en escalier est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{[a,b]}$.

**Exercice 9**

Soit $\sigma$ une subdivision de $[a, b]$. Vérifier que $F = \{f \in \mathbb{C}^{[a,b]}$ en escalier , $\sigma$ est adaptée à $f\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{[a,b]}$ et déterminer sa dimension.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

## 1.3 Approximation uniforme

Le but de cette partie est alors d'approcher toute fonction continue par morceaux par une fonction en escalier.

**Proposition 10**

Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$. Alors $f$ est bornée sur $[a, b]$ (i.e. $|f|$ est majorée).

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

**Remarque 11**

La fonction n'atteint pas forcément ses bornes ! La fonction

$$f : \left| \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x \text{ si } x \in [0,1[, \\ 0 \text{ si } x = 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

est continue par morceaux, bornée sur $[0,1]$, mais n'atteint pas ses bornes (sa borne inférieure, oui, mais pas sa borne supérieure).

**Définition 12**

Soit $f \in \mathscr{C}_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{K})$. La quantité $\sup\limits_{t\in[a.b]} |f(t)|$ existe, est finie et est notée $\|f\|_{L^\infty([a,b])}$ ou $\|f\|_\infty$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le segment considéré, et appelée norme uniforme ou norme $\infty$ de $f$ sur $[a.b]$.

**Exercice 13**

Pour $f$ et $\varepsilon$ donnés, dessiner une fonction $g$ vérifiant $\|f-g\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

**Proposition 14**

$\|\cdot\|\infty$ est une norme sur $\mathscr{C}_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{K})$, ce qui se définit par :

**(i)** $\forall f \in \mathscr{C}_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{K}),\ \|f\|_\infty \geqslant 0$.

**(ii)** (homogénéité) $\forall f \in \mathscr{C}_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\,\|f\|_\infty$.

**(iii)** (séparation) $\forall f \in \mathscr{C}_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{K})(\|f\|_\infty = 0) \Rightarrow f = 0$ sur $[a,b]$.

**(iv)** (inégalité triangulaire) $\forall (f,g) \in \mathscr{C}_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{K})^2,\ \|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

On va maintenant montrer que l'on peut approcher uniformément (i.e. au sens de la norme infinie) n'importe quelle fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier. Comment montrer cette proposition ? On a besoin d'une notion uniforme sur un segment.

**Définition 15**

Soit $\mathrm{I}$ un intervalle. Une fonction $f$ définie sur $\mathrm{I}$ est dite uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in \mathrm{I}^2,\ |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

**Remarque 16**

Qu'est-ce que c'est ne pas être uc ?

1. Rappel : « $f$ est continue sur $\mathrm{I}$ » :
$$\forall x \in \mathrm{I},\ \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,\ \forall y \in \mathrm{I},\ |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon.$$
Dans cette définition, le $\eta$ peut dépendre de $x$.
2. En revanche, pour une fonction continue, non ! Le $\eta$ doit fonctionner pour **tous** les $x$.
3. Par exemple, la fonction inverse n'est pas uniformément continue !
4. Comment traduire « $f$ n'est pas uniformément continue ? »
$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x \in \mathrm{I},\ \exists y \in \mathrm{I},\ |x-y| \leqslant \eta \wedge |f(x)-f(y)| > \varepsilon.$$

**Proposition 17**

Soit $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. $f$ n'est pas uniformément continue,
2. Il existe $\varepsilon > 0$, deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathrm{I}$ telles que $x_n - y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et telles que pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $|f(x_n)-f(y_n)| > \varepsilon$.
3. Il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathrm{I}$ telles que $x_n - y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et telles que $(f(x_n)-f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

**Exemple 18**

1. Par exemple, $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   En effet, posons, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$,
   $$x_n = \frac{1}{n} \text{ et } y_n = \frac{1}{2n}.$$
   Alors $x_n - y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ mais $f(x_n) - f(y_n) = n - 2n = -n$ ne tend pas vers 0.
2. De même, $g : x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.
   Posons en effet, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$,
   $$x_n = \sqrt{n} \text{ et } y_n = \sqrt{n+1}.$$
   Alors
   $$x_n - y_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1} = \frac{-1}{\sqrt{n(n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
   et $g(x_n) - g(y_n) = n - (n+1) = -1$ ne tend pas vers 0. Donc $g$ n'est pas uniformément continue.

**Proposition 19**

**(i)** Une fonction uniformément continue sur un intervalle y est continue.

**(ii)** Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.

**Exemple 20**

Attention, la réciproque de la dernière proposition est fausse ! On verra en TD que $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue mais pas continue sur $\mathbb{R}_+$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

**Théorème 21 (Heine)**

Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Le but est alors d'approcher toute fonction continue par morceaux par une fonction en escalier !

**Proposition 22**

On note ici $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions en escalier de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$.

1. $\forall f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{K}),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists g \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ telle que $\|f-g\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
2. $\forall f \in \mathscr{C}^0_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{K}),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists g \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ telle que $\|f-g\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
3. $\forall f \in \mathscr{C}^0_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{K}),\ \exists (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ telle que $\|f-g_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   On dit que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

**Remarque :** étant donnée la construction précédente, on a la proposition suivante :

**Proposition 23**

Soit $f \in \mathscr{C}_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{R})$, positive sur $[a, b]$. Alors il existe $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ telle que $\|f - g_n\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et telle que pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $g_n$ est positive sur $[a, b]$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Maintenant on a tous les outils en main pour pouvoir définir l'intégrale, d'abord d'une fonction en escalier, puis d'une fonction continue par morceaux.
Dans toute la suite $\mathrm{I}$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

# 2 Construction de l'intégrale de Riemann

Dans toute cette section, on note $\mathcal{E}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions en escalier de $\mathrm{I}$ dans $\mathbb{K}$ (i.e. en escalier sur tout segment de $\mathrm{I}$).

## 2.1 Intégrale d'une fonction en escalier

**Proposition 24**

(et définition) Soit $f \in \mathcal{E}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$, $[a, b] \subset \mathrm{I}$, $\sigma$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à $f$, $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$, $x_0 < \dots < x_n$, $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tels que $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $\lambda_i$ est la valeur de $f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ (constante car $f$ est en escalier).
La quantité $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (x_{i+1} - x_i)$ ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée $\sigma$.
Cette quantité est nommée intégrale de $f$ de $a$ à $b$, notée $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ ou encore $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

**Démonstration**

1. Soit $\sigma$ adaptée à $f$, $\sigma \subset \sigma'$. On écrit $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$, et $\sigma' = \{y_0, \dots, y_m\}$ où $m \geqslant n$.
   Alors
   - $x_0 = y_0$,
   - $x_n = y_m$,
   - pour tout $i$ dans $[\![0, n]\!]$, il existe $k_i$ dans $[\![0, m]\!]$ tel que $y_{k_i} = x_i$ (c'est parce que $\sigma \subset \sigma'$).

   Notons $\mu_j$ la valeur de $f$ sur $]y_j, y_{j+1}[$. Alors la somme associée à $\sigma'$ est

$$\sum_{j=0}^{m-1} \mu_j (y_{j+1} - y_j) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=k_i}^{k_{i+1}-1} \mu_j (y_{j+1} - y_j).$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Mais, pour tout $j$ dans $[\![k_i, k_{i+1}-1]\!]$, $\mu_j = \lambda_i$ ! En effet, $f$ est constante sur $]x_i, x_{i+1}[$, c'est-à-dire sur $]y_{k_i}, y_{k_{i+1}}[$ ! Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{m-1} \mu_j (y_{j+1} - y_j) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=k_i}^{k_{i+1}-1} \lambda_i (y_{j+1} - y_j) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \sum_{j=k_i}^{k_{i+1}-1} (y_{j+1} - y_j) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (y_{k_{i+1}} - y_{k_i}) \text{ par télescopage.} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (x_{i+1} - x_i),
\end{aligned}$$

d'où l'égalité des deux sommes !

2. Si $\sigma$ et $\sigma'$ sont maintenant deux subdivisions quelconques adaptées à $f$, $\sigma \subset \sigma \cup \sigma'$ et $\sigma' \subset \sigma \cup \sigma'$, donc les sommes correpondant à ces trois subdivisions sont égales par le point précédent !

■

**Exercice 25**

Calculer, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_0^x \lfloor t \rfloor \, dt$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

**Proposition 26**

Soit $f \in \mathcal{E}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$, $[a, b] \subset \mathrm{I}$.

1. $\varphi \mapsto \int_a^b \varphi$ est une forme linéaire sur $\mathcal{E}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ (ou sur $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$, peu importe en fait !).
2. Si $g \in \mathbb{K}^{\mathrm{I}}$ est égale à $f$ sur $[a, b]$ sauf en un nombre fini de points, alors $g \in \mathcal{E}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ et $\int_a^b f = \int_a^b g$.
3. (relation de Chasles) Si $c \in [a, b]$,
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$
4. On a l'inégalité triangulaire :
$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$$

**Démonstration**

1. Soient $\varphi$ et $\psi$ dans $\mathcal{E}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $\sigma$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à $f$, $\sigma'$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à $g$. Alors $\sigma \cup \sigma'$ est adaptée à $f$, à $g$ et à $\alpha f + g$.
Notons $\sigma \cup \sigma' = \{x_0, \dots, x_n\}$ avec $a = x_0 < \dots < x_n = b$, notons, pour tout $i$ dans $[\![0, n-1]\!]$, $\lambda_i$ la valeur de $f$ sur $]x_i, x_{i+1}[$ et $\mu_i$ la valeur de $g$ sur $]x_i, x_{i+1}[$. Alors
$$\begin{aligned}\int_a^b \alpha f + g &= \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha\lambda_i + \mu_i)(x_{i+1} - x_i)\\ &= \alpha \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (x_{i+1} - x_i) + \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i (x_{i+1} - x_i)\\ &= \alpha \int_a^b f + \int_a^b g,\end{aligned}$$
d'où la linéarité.
2. Soit $\sigma$ une subdivision adaptée à $f$ et $\{z_1, \dots, z_p\}$ les points en lesquels $g$ diffère de $f$.
Alors $\sigma \cup \{z_1, \dots, z_p\}$ est adaptée à $f$ mais aussi à $g$ : en effet, si on note $\sigma \cup \{z_1, \dots, z_p\} = \{x_0, \dots, x_n\}$ avec $a = x_0 < \dots < x_n = b$, alors $f$ est constante sur $]x_i, x_{i+1}[$, tout comme $g$ ($g$ n'est pas différente de $f$ sur un tel intervalle car $g$ ne diffère de $f$ que en les $z_k$).
Mais alors
$$\int_a^b g = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (x_{i+1} - x_i) = \int_a^b f.$$
3. si $\sigma$ est une subdivision adaptée à $f$, alors $\sigma \cup \{c\}$ est aussi adaptée à $f$. Notons
$$\sigma \cup \{c\} = \{x_0, \dots, x_n\} \text{ avec } a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$
et notons $i_0$ l'indice de $[\![0, n]\!]$ tel que $x_{i_0} = c$. Alors $\{x_0, \dots, x_{i_0}\}$ est adaptée à $f_{|[a,c]}$ et $\{x_{i_0}, \dots, x_n\}$ est

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

adaptée à $f_{|[c,b]}$. Donc

$$\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{i_0-1} \lambda_k(x_{k+1}-x_k) + \sum_{k=i_0}^{n-1} \lambda_k(x_{k+1}-x_k)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k(x_{k+1}-x_k)$$
$$= \int_a^b f(t)dt.$$

4. Soit $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$, $\sigma = \{x_0,\dots,x_n\}$ adaptée à $f$, $a = x_0 < \cdots < x_n$, $\lambda_i$ la valeur de $f$ sur $]x_i, x_{i+1}[$. Alors $\sigma$ est aussi adaptée à $|f|$ et $|f|$ égale $|\lambda_i|$ sur $]x_i, x_{i+1}[$. Donc

$$\left|\int_a^b f\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i(x_{i+1}-x_i)\right|$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |\lambda_i(x_{i+1}-x_i)| \text{ par l'inégalité triangulaire sur } \mathbb{K}$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} |\lambda_i|(x_{i+1}-x_i) = \int_a^b |f|$$

■

**Proposition 27**

Soient $f$ et $g$ dans $\mathcal{E}(\mathrm{I},\mathbb{R})$, $[a,b] \subset \mathrm{I}$.

1. Si $f(t) \geqslant 0$ pour tout $t$ de $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$.
2. si $f(t) \leqslant g(t)$ pour tout $t$ de $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

**Remarque 28**

**Attention !** La réciproque est fausse : l'intégrale de $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est positive sur $[-1,3]$ mais la partie entière n'y est pas positive.

**Démonstration**

1. soit $\sigma = \{x_0,\dots,x_n\}$ une subdivision adaptée à $f$, $a = x_0 < \cdots < x_n = b$, $\lambda_i$ la valeur de $f$ sur $]x_i, x_{i+1}[$. Alors pour tout $i$, $\lambda_i \geqslant 0$ et
$$\int_a^b f = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\lambda_i}_{\geqslant 0} \underbrace{(x_{i+1}-x_i)}_{\geqslant 0} \geqslant 0.$$
2. On sait que pour tout $t$ dans $[a,b]$, $g(t) - f(t) \geqslant 0$, donc
$$\int_a^b g(t) - f(t)dt \geqslant 0,$$
donc, par linéarité, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$.

■

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

### 2.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

**Théorème 29 (et définition)**

Soit $f$ dans $\mathscr{C}_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{C})$. Alors quelle que soit la suite $(\varphi_p)$ de fonctions en escalier convergeant uniformément vers $f$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \varphi_p(t)dt$ converge vers une limite indépendante du choix de $\varphi_p$. Cette quantité est appelée intégrale de $a$ à $b$ de $f$, notée $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, $\displaystyle\int_a^b f$, ou $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

**Lemme 30**

Si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de fonctions en escalier telles que $\|f-\varphi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\|f-\psi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors

$$\|\varphi_n-\psi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \int_a^b \varphi_n-\psi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

**Proposition 31**

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathrm{I}$.

**(i)** L'application $f \mapsto \displaystyle\int_{[a,b]} f$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions cpm (sur $\mathrm{I}$ ou $[a, b]$).

**(ii)** Si $f \in \mathscr{C}_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{K})$, si $g$ est une fonction égale à $f$ sauf en un nombre fini de points, alors $g$ est continue par morceaux et $\displaystyle\int_a^b g = \int_a^b f$.

**(iii)** Pour toute fonction $f$ cpm, pour tout $c$ dans $[a, b]$,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

**(iv)** Pour toute fonction $f$ cpm,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \mathfrak{Re}(f(t))dt + i\int_a^b \mathfrak{Im}(f(t))dt.$$

**(v)** Si $f$ est dans $\mathscr{C}_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{K})$, $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$.

**Démonstration**

1. Soient $(f, g)$ dans $\mathscr{C}_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{K})^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suites de fonctions en escalier telles que $\|\varphi_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\|\psi_n - g\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Soit $n$ dans $\mathbb{N}$. Alors, par linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escalier,

$$\int_a^b \lambda\varphi_n + \psi_n = \lambda\int_a^b \varphi_n + \int_a^b \psi_n.$$

Mais on remarque que

$$\|\lambda f + g - (\lambda\varphi_n + \psi_n)\|_\infty \leqslant \|\lambda f - \lambda\varphi_n\|_\infty + \|g - \psi_n\|_\infty = |\lambda|\,\|f - \varphi_n\|_\infty + \|g - \psi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc

$$\int_a^b \lambda\varphi_n + \psi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b \lambda f + g,$$

donc, par unicité de la limite, et comme

$$\int_a^b \varphi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f \text{ et } \int_a^b \psi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b g,$$

on obtient le résultat.

2. On remarque que $g - f$ est en escalier, nulle partout sauf en un nombre fini de points. Par définition de l'intégrale d'une fonction en escalier, cette intégrale est nulle, donc

$$\int_a^b g - f = 0,$$

donc, par linéarité, $\displaystyle\int_a^b g = \int_a^b f$.

3. Là, il faut faire attention à l'intervalle sur lequel on approche $f$ ou $g$ ! Voilà pourquoi je précise le segment après la norme. Soit $\varphi_n$ telle que $\|f-\varphi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty,[a,b]}{\longrightarrow} 0$. Alors

$$\|f-\varphi_n\|_{\infty,[a,c]} = \sup_{t\in[a,c]} |f(t)-\varphi_n(t)| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |f(t)-\varphi_n(t)| = \|f-\varphi_n\|_{\infty,[a,b]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et, de même,

$$\|f-\varphi_n\|_{\infty,[c,b]} = \sup_{t\in[c,b]} |f(t)-\varphi_n(t)| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |f(t)-\varphi_n(t)| = \|f-\varphi_n\|_{\infty,[a,b]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc, par définition de l'intégrale,

$$\int_a^c \varphi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^c f, \text{ et } \int_c^b \varphi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_c^b f.$$

Ainsi, par la relation de Chasles pour l'intégrale des fonctions en escalier,

$$\int_a^b \varphi_n = \int_a^c \varphi_n + \int_c^b \varphi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^c f + \int_c^b f,$$

d'où l'égalité désirée.

4. Immédiat par linéarité.

5. On remarque que si $\|f-\varphi_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors par l'inégalité triangulaire inversée, pour tout $t$ dans $[a,b]$,

$$||f(t)|-|\varphi_n(t)|| \leqslant |f(t)-\varphi_n(t)|,$$

donc

$$\||f|-|\varphi_n|\|_\infty \leqslant \|f-\varphi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit que $\displaystyle\int_a^b |\varphi_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b |f|$, et on obtient le résultat par inégalité triangulaire sur les fonctions en escalier et par passage à la limite dans les inégalités.

■

## 2.3 Bornes non ordonnées

**Définition 32**

Soit $f\in\mathscr{C}_{\text{pm}}(\mathrm{I},\mathbb{K})$, $[a,b]\subset\mathrm{I}$. On définit

$$\int_b^a f = -\int_a^b f$$

**Remarque 33**

1. La linéarité et la relation de Chasles sont toujours valables.
2. Il faut faire attention à l'ordre des bornes pour les inégalités : les inégalités se font toujours avec des bornes **ordonnées**.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

### 2.4 Formule fondamentale du calcul intégral

**Proposition 34**

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$, soit $a \in \mathrm{I}$. Alors $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de $f$ s'annulant en $a$.