Chapitre 29 – Familles sommables

1 Familles à termes positifs

Définition 1

On définit dans $[0, +\infty]$ les règles de calcul suivantes :

- $\forall \lambda \in [0, +\infty]$, $\lambda + \infty = +\infty$,
- $0 \times +\infty = 0$,
- $\forall \lambda \in]0, +\infty[$, $\lambda \times (+\infty) = +\infty$
- $\sup[0, +\infty] = +\infty$ et $\sup \emptyset = 0$.

Dans toute la section 1, I et J sont des ensembles et $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$ et $(b_j)_{j\in J}$ sont des familles d'éléments de $[0, +\infty]$ indexées sur I, J.

Définition 2 (et prop)

On définit $\displaystyle\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i = \sup_{J\in\mathcal{P}_f(\mathrm{I})} \sum_{j\in J} a_j$, où $\mathcal{P}_f(\mathrm{I})$ désigne l'ensemble des parties finies de I.

Proposition 3

1. Pour tous λ et μ réels positifs, $\displaystyle\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda a_i + \mu b_i = \lambda \sum_{i\in\mathrm{I}} a_i + \mu \sum_{i\in\mathrm{I}} b_i$.
2. Si pour tout i dans I, $a_i \leqslant b_i$, alors $\displaystyle\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i \leqslant \sum_{i\in\mathrm{I}} b_i$.

Proposition 4 (Sommation par paquets)

Soit $(E_j)_{j\in J}$ une partition de I. Alors $\displaystyle\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in E_j} a_i\right)$.

Proposition 5 (Conséquences du théorème de sommation par paquets)

Les conséquences de ce théorème sont au moins aussi importantes que le théorème en lui-même.

1. (Théorème de Fubini positif) Si $(c_{ij})_{(i,j)\in\mathrm{I}\times J}$ est une famille de réels positifs indexée sur un produit, alors $\displaystyle\sum_{i\in\mathrm{I}}\sum_{j\in J} c_{ij} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in\mathrm{I}} c_{ij}$.
2. (produit) $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathrm{I}\times J} a_i b_j = \left(\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right)$.

2 Familles quelconques

Définition 6

Soit $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de complexes. On dit que $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est sommable si $\displaystyle\sum_{i\in\mathrm{I}} |x_i| < +\infty$.

Proposition 7 (et def)

1. Soit $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de réels indexée sur I. Alors cette famille est sommable si et seulement si $\sum_{i\in\mathrm{I}} x_i^+$ et $\sum_{i\in\mathrm{I}} x_i^-$ sont finies. On note alors $\sum_{i\in\mathrm{I}} x_i = \sum_{i\in\mathrm{I}} x_i^+ - \sum_{i\in\mathrm{I}} x_i^-$.
2. Soit $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de complexes indexée sur I. Alors cette famille est sommable si et seulement si $(\mathfrak{Re}(x_i))_{i\in\mathrm{I}}$ et $(\mathfrak{Im}(x_i))_{i\in\mathrm{I}}$ sont sommables. On note alors $\sum_{k\in\mathrm{I}} x_k = \sum_{k\in\mathrm{I}} \mathfrak{Re}(x_k) + i\sum_{k\in\mathrm{I}} \mathfrak{Im}(x_k)$.

Proposition 8

Soient $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}, (y_i)_{i\in\mathrm{I}}, (u_{ij})_{(i,j)\in\mathrm{I}\times J}, (a_i)_{i\in\mathrm{I}}, (b_j)_{j\in J}$ des familles de nombres complexes et $\lambda\in\mathbb{C}$.

1. Si $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est sommable : $\left|\sum_{i\in\mathrm{I}} x_i\right| \leqslant \sum_{i\in\mathrm{I}} |x_i|$.
2. Si $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ et $(y_i)_{i\in\mathrm{I}}$ sont sommables, $(x_i+\lambda y_i)_{i\in\mathrm{I}}$ l'est aussi et : $\sum_{i\in\mathrm{I}} (\lambda x_i + y_i) = \lambda\sum_{i\in\mathrm{I}} x_i + \sum_{i\in I} y_i$.
3. Si $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ et $(y_i)_{i\in\mathrm{I}}$ sont sommables et si $x_i\leqslant y_i$ pour tout $i\in\mathrm{I}$, alors $\sum_{i\in\mathrm{I}} x_i \leqslant \sum_{i\in\mathrm{I}} y_i$.
4. (Théorème de sommation par paquets) Si $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est sommable, alors pour tout recouvrement disjoint $(\mathrm{I}_k)_{k\in K}$ de I, la famille $\left(\sum_{i\in\mathrm{I}_k} x_i\right)_{k\in K}$ l'est aussi et : $\sum_{i\in\mathrm{I}} x_i = \sum_{k\in K}\sum_{i\in\mathrm{I}_k} x_i$.
5. (invariance par permutation) Si $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est sommable, alors pour toute bijection φ de J sur I, la famille $\left(x_{\varphi(j)}\right)_{j\in J}$ l'est aussi et : $\sum_{i\in\mathrm{I}} x_i = \sum_{j\in J} x_{\varphi(j)}$.
6. (théorème de Fubini) Si $(u_{ij})_{(i,j)\in\mathrm{I}\times J}$ est sommable, les familles $\left(\sum_{j\in J} u_{ij}\right)_{i\in\mathrm{I}}$ et $\left(\sum_{i\in\mathrm{I}} u_{ij}\right)_{j\in J}$ le sont aussi et :
$$\sum_{(i,j)\in\mathrm{I}\times J} u_{ij} = \sum_{i\in\mathrm{I}}\sum_{j\in J} u_{ij} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in\mathrm{I}} u_{ij}.$$
7. Si $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$ et $(b_j)_{j\in J}$ sont sommables, la famille $(a_i b_j)_{(i,j)\in\mathrm{I}\times J}$ l'est aussi et :
$$\sum_{(i,j)\in\mathrm{I}\times J} a_i b_j = \sum_{i\in\mathrm{I}} a_i \times \sum_{j\in J} b_j.$$

Proposition 9 (Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes)

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les termes généraux de deux séries absolument convergentes. Définissons, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Alors $\sum c_n$ converge et $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n\right)$.

Proposition 10

L'exponentielle complexe est un morphisme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$.