 nlaillet.math@gmail.com

Chapitre 28 – Espaces préhilbertiens réels

1 Produit scalaire

Définition 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une fome bilinéaire symétrique définie positive, i.e. une application $\left| \begin{array}{l} E \times E \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle \end{array} \right.$ vérifiant :

(i) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire, i.e. pour tout x dans E, $y \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire et $y \mapsto \langle y, x \rangle$ est linéaire

(ii) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique, i.e. $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

(iii) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie, i.e. : $\forall x \in E,\ \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

(iv) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est positive, i.e. :$\forall x \in E,\ \langle x, x \rangle \geqslant 0$.

Un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire est appelé **espace préhilbertien réel** (epr).
Un espace préhilbertien réel de dimension finie est appelé **espace euclidien** (eve).
La norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par $\forall x \in E,\ \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Définition 2

Sur $\mathbb{R}^n$, on définit le produit scalaire usuel par $\langle X, Y \rangle = X^T Y = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

On définit aussi les produits scalaires canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathbb{R}[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Proposition 3

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un epr, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Alors $\|\cdot\|$ vérifie les propriétés suivantes :

(i) (positivité) $\|\cdots\|$ est une application de E dans $\mathbb{R}_+$

(ii) (séparation) $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

(iii) (homogénéité) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$.

Proposition 4

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un epr, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée, $(x, y) \in E^2$.

(i) (identités remarquables) $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2$ et $\|x\|^2 - \|y\|^2 = \langle x + y, x - y \rangle$.

(ii) $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 + \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq j}} \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \langle x_i, x_j \rangle$.

(iii) (identités de polarisation) $\langle x, y \rangle = \dfrac{\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2} = \dfrac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}$.

Proposition 5

Soit $E, \langle \cdot, \cdot \rangle$ un espace préhilbertien réel, $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit $(x, y) \in E^2$.

(i) (inégalité de Cauchy-Schwarz) $\langle x, y \rangle \leqslant \|x\|\, \|y\|$, avec égalité si et seulement si x et y sont positivement colinéaires.

(ii) $|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\|\, \|y\|$, avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

(iii) (inégalité triangulaire) $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$, avec égalité si et seulement si x et y sont positivement colinéaires. Ainsi, $\|\cdot\|$ est une norme.

(iv) $\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leqslant \|x+y\|$.

2 Orthogonalité

2.1 Définitions

Définition 6

Soit $E, \langle \cdot, \cdot \rangle$ un espace préhilbertien réel, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

(i) si $(x, y) \in E^2$, x et y sont dits orthogonaux et on écrit $x \perp x$ si $\langle x, y \rangle = 0$.

(ii) si $x \in E$, on dit que x est unitaire si $\|x\| = 1$.

(iii) on dit qu'une famille $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de vecteurs de E est orthogonale si pour tous $i \neq j$, $x_i \perp x_j$.

(iv) on dit qu'une famille $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de vecteurs de E est orthonormale ou orthonormée si elle est orthogonale et si pour tout i dans I, $\|x_i\| = 1$.

(v) si $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est une base de E, on dit que $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est une base orthogonale de E si la famille $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est orthogonale, et on dit qu'elle est orthonormée (BON) si la famille est orthonormée.

Proposition 7

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un epr. Alors $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est une famille orthonormée de E si et seulement si pour tous $(i, j) \in E^2$, $\langle x_i, y_j \rangle = \delta_{ij}$.

Remarque 8

Dans $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la base canonique est une BON pour le produit scalaire canonique.

Proposition 9

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un epr.

(i) Le seul vecteur orthogonal à tous les autres est le vecteur nul.

(ii) En particulier, deux éléments x et y sont égaux si et seulement si pour tout z de E, $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$.

Proposition 10 (Théorème de Pythagore)

Soit $E, \langle \cdot, \cdot \rangle$ un espace préhilbertien réel

(i) $\forall (x, y) \in E^2,\ x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(ii) pour toute famille orthogonale $(x_1, \ldots, x_n)$ de E, $\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$.

Proposition 11

Soit $E, \langle \cdot, \cdot \rangle$ un espace préhilbertien réel. Toute famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre. En particulier, toute famille orthonormale est libre.

2.2 Sous-espace orthogonal, existence de bases orthonormées

Définition 12

Soit E un epr, A une partie de E. On définit l'orthogonal de A par $A^\perp = \{x \in E,\ \forall a \in A, \langle x, a\rangle = 0\}$. C'est l'ensemble des éléments de E qui sont orthogonaux à tous les éléments de A.

Proposition 13

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, A une partie de E. Alors

1. $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E,
2. si $B \subset E$, si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$,
3. $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$,
4. si A est un sev de E et $(e_1, \ldots, e_r)$ une famille génératrice de A, alors pour tout x dans E,
$$x \in A^\perp \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, r]\!],\ \langle x, e_i\rangle = 0.$$
5. $A \subset \left(A^\perp\right)^\perp$.

Définition 14

Deux sev F et G d'un epr $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sont dits orthogonaux si $\forall f \in F,\ \forall g \in G,\ \langle f, g\rangle = 0$. On note $F \perp G$.

Proposition 15

Deux sev F et G orthogonaux d'un epr $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sont en somme directe.

Proposition 16

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un epr, F un sev de E.

1. Si F admet un supplémentaire G tel que F et G sont orthogonaux, alors $G = F^\perp$, et $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.
2. Si u est un vecteur non nul, alors $\mathrm{Vect}(u)^\perp$ est un hyperplan, supplémentaire à u.
3. Si E est euclidien, toute famille orthonormée peut être complétée en une base orthonormée.
4. Si E est euclidien, E admet une base orthonormée.

Proposition 17 (Coordonnées dans une base orthonormée)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un epr, $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une base orthonormée de E (on suppose qu'elle existe).

- **(i)** si $x \in E$, la coordonnée de x selon e_i est $\langle x, e_i\rangle$.
- **(ii)** si $i \in \mathrm{I}$ et e_i^* est la forme linéaire coordonnée associée à e_i, $e_i^* : x \mapsto \langle x, e_i\rangle$.
- **(iii)** si $(x, y) \in E^2$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i \in \mathrm{I}} \langle x, e_i\rangle \langle y, e_i\rangle$. En particulier, $\|x\|^2 = \sum_{i \in \mathrm{I}} \langle x, e_i\rangle^2$.
- **(iv)** si E est euclidien, si X et Y sont les vecteurs des coordonnées de x et y dans $(e_1, \ldots, e_n)$, alors $\langle x, y\rangle = X^T Y$, $\|x\| = \sqrt{X^T X}$.
- **(v)** si E est un $\mathbb{K}$-evdf et $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace vectoriel euclidien, si $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ est une BON de F, si $u \in \mathscr{L}(E, F)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = \Big(\langle u(e_j), f_i\rangle\Big)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.

2.3 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Proposition 18

Soit E un epr, F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.

1. F et $F^\perp$ sont supplémentaires orthogonaux,
2. Si E est de dimension finie, $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$.

Définition 19

Soit E un epr, F un sev de dimension finie de E.

1. $F^\perp$ est appelé **le** supplémentaire orthogonal de F.
2. La projection orthogonale π_F sur F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

Proposition 20

Soit E un epr, F un sev de dimension finie de E, de base $(e_1, \dots, e_p)$, π_F la projection orthogonale sur F. Alors pour tout x dans E, $\pi_F(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k \rangle \, e_k$.

Proposition 21

Soit E un eps, $x \in E$ et F un sev de dimension finie de E. La quantité $\inf\{\|x-y\|, y \in F\}$ existe et est atteinte par le projeté orthogonal de x sur F. On la note $d(x, F)$.

2.4 Orthonormalisation

Théorème 22 (procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre d'un espace préhilbertien réel E. Il existe une famille orthonormée $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ telle que pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ (que l'on notera F_k). Cette famille est donnée par la relation suivante :

- $e_1 = \pm \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$,
- pour tout k dans $[\![1, n-1]\!]$, si $(e_1, \dots, e_k)$ sont construits, on pose

$$\varepsilon_{k+1} = x_{k+1} - \pi_{F_k}(x_{k+1}) = x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle x_{k+1}, e_i \rangle \, e_i \text{ et } e_{k+1} = \pm \frac{\varepsilon_{k+1}}{\|\varepsilon_{k+1}\|}.$$

On a de plus unicité si on impose pour tout k, $\langle x_k, e_k \rangle > 0$.

Proposition 23 (Théorème de représentation de Riesz, HP)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, φ une forme linéaire sur E. Il existe un unique vecteur u de E tel que

$$\forall x \in E, \ \varphi(x) = \langle u, x \rangle .$$