

TD 24

Matrices et applications linéaires

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. *Endomorphismes cycliques.* ●●○ Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant

$$f^n = 0 \text{ et } f^{n-1} \neq 0$$

1. Justifier qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ forme une base de E .
2. Déterminer les matrices de f, f^2, \dots, f^{n-1} dans cette base.
3. Démontrer que $\{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\} = \text{Vect}(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$

Exercice 2. *Sur l'opérateur de différence.* On considère l'opérateur de différence $\Delta : \begin{cases} \mathbb{C}_n[X] \rightarrow \mathbb{C}_n[X] \\ P \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$.

1. Représenter la matrice de Δ dans la base canonique au départ et à l'arrivée, et en déduire que Δ est nilpotent.
2. Déterminer, par un raisonnement matriciel, l'image et le noyau de Δ .

On va démontrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme u de $\mathbb{C}_n[X]$ tel que $u^2 = \Delta$. On suppose qu'un tel u existe.

3. Démontrer que u stabilise $\mathbb{C}_1[X]$.
4. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5. Conclure.

Exercice 3. ●●○ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = B^2 = I_n$. Démontrer que A et B sont semblables si et seulement si elles ont même trace.

Exercice 4. *Couple de symétries qui anticommulent.* Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f, g des endomorphismes de E tels que $f^2 = g^2 = \text{Id}_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

1. Montrer que la dimension de E est paire.
2. Montrer qu'il existe une base \mathcal{E} de E t.q. $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$ et $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. ●●○

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. Montrer qu'il existe X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que $M = XY^T$.
2. Prouver que toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r s'écrit comme somme de r matrices de rang 1, et donc qu'il existe $X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_r$ $2r$ matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $A = \sum_{i=1}^r X_i Y_i^T$.
3. Soit E un \mathbb{K} -ev de df et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Montrer que $f^2 = \text{Tr}(f)f$.
4. À quelle condition un endomorphisme de rang 1 est-il un projecteur ?

Exercice 6. Soient A et $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On souhaite montrer que

$$\text{rg}(B) \leq \text{rg}(A) \Leftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{K}), \exists Q \in M_p(\mathbb{K}) / B = PAQ$$

1. Trouver le sens facile et le démontrer.
2. Faire le sens plus difficile, en commençant par le cas où A et B sont les matrices les plus simples possibles.

Exercice 7. Endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. ●●○

- Déterminer la trace de l'application de transposition sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \varphi(M) = MA$. Déterminer $\text{Tr}(\varphi)$.

Exercice 8. Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$.

- Montrer que $\left\{ \begin{array}{l} M_n(K) \rightarrow M_n(K)^* \\ A \mapsto (X \mapsto \text{tr}(AX)) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.
- En déduire que tout hyperplan de $M_n(K)$ contient une matrice inversible.

Stratégie/exercices conseillés. En sus des exercices faits en cours, il faut à mon avis :

- parler de base adaptée (13 ou 17),
- faire un exercice avec une application linéaire sur les polynômes (10),
- faire un exercice un peu fin de changement de base (19),
- étudier au moins une fois un commutateur ($AB - BA$) : exercice 26.

Si vous avez du mal, concentrez-vous sur les exercices 16 et 9.

2 Matrice d'une application linéaire dans une base

Exercice 9. ●○● Déterminer dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ la matrice de l'endomorphisme $f : P \mapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$. Déterminer le noyau et l'image de cette application linéaire.

Exercice 10. ●○○ Soit $f_\alpha : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto (1+X)P' - \alpha P \end{array} \right.$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Montrer que $f_\alpha \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
- Montrer que $\mathcal{B} = (1, 1+X, (1+X)^2, \dots, (1+X)^n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Déterminer la matrice A_α de f_α dans la base précédente.
- À quelle condition sur α l'endomorphisme f_α est-il inversible ?

Exercice 11. ●●○ Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel engendré par les fonctions f_1 et f_2 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = e^{-x}, f_2(x) = xe^{-x}.$$

- Quelle est la dimension de E ?
- Montrer que $\varphi : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de E .
- Écrire la matrice représentative A de φ dans la base $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$ de E .
- Calculer A^n pour tout entier naturel n .
- Soit $f : x \mapsto (3x+1)e^{-x}$. Calculer $f^{(n)}$ pour tout entier naturel n .
- Montrer que tout élément f de E admet une unique primitive F élément de E et que $\psi : f \mapsto F$ est un endomorphisme de E .
- (i) Déterminer la matrice B de ψ dans la base \mathcal{B} .
(ii) Quel lien y a-t-il entre A et B ?

Exercice 12. ●●○ Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 13. ●●○ Soit u un endomorphisme de E \mathbb{K} -evdf. Représenter $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$ dans une base \mathcal{E} qui fasse apparaître le plus de zéros possible, lorsque...

1. $u^2 = 0$.
2. $\text{Im}(u) = \ker(u)$.
3. $\text{Im}(u) \oplus \ker(u) = E$.
4. $\ker(u)$ est un hyperplan de E .

Exercice 14. ●●○

1. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ tel que $u^2 = 0$ et $\text{rg}(u) = n$. Montrer que $\text{Ker } u = \text{Im } u$. En déduire que u peut être représentée par $\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{3n})$ tel que $u^3 = 0$ et $\text{rg}(u) = 2n$. Montrer que $\text{Ker } u = \text{Im } u^2$. En déduire que u peut être représentée par $\begin{pmatrix} 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}$.

Exercice 15. ●●○ Soient E un \mathbb{K} -evdf p , F un \mathbb{K} -evdf n . Soit A un sous-espace vectoriel de E de dimension a , B un sous-espace vectoriel de F de dimension b .

1. Soit $\mathcal{K}_A = \{u \in \mathcal{L}(E, F), A \subset \ker(u)\}$. Démontrer que \mathcal{K}_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$ et en déterminer la dimension (on pourra déterminer la forme de la matrice de $u \in \mathcal{K}_A$ dans une base adaptée à A).
2. Soit $\mathcal{I}_B = \{u \in \mathcal{L}(E, F), \text{Im}(u) \subset B\}$. Démontrer que \mathcal{I}_B est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$ et en déterminer la dimension.

3 Matrices de passage – matrices semblables et équivalentes

Exercice 16. ●○○ Dans cet exercice on notera $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . On considère l'application linéaire f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 définie par

$$f(x, y, z) = (2x - 2y + 2z, -x + y - 2z, -2x + 2y - 3z)$$

1. Donner la matrice A de f dans la base \mathcal{B} au départ et à l'arrivée.
2. Donner une base du noyau de f .
3. Donner une équation de l'image de f .
4. On considère les vecteurs $u_1 = e_1 + e_2$, $u_2 = e_2 + e_3$ et $u_3 = -2e_1 + e_3$.
 - (i) Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
 - (ii) Quelle est la matrice de passage P de la base \mathcal{B} vers la base \mathcal{B}' ?
5. (i) Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$, et $f(u_3)$ en fonction de u_1 , u_2 , u_3 .
 - (ii) Quelle est la matrice $C = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ de f dans la base \mathcal{B}' ?
6. Calculer P^{-1} .

Exercice 17. ●○○

1. Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui n'est pas inversible est équivalente à une matrice nilpotente.
2. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ non constante telle que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, f(AB) = f(A)f(B)$. Montrer que A est inversible si et seulement si $f(A) \neq 0$.

Exercice 18. ●●○ Soit E un espace vectoriel de dimension n . On souhaite démontrer qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de projecteurs. On fixe une base \mathcal{B} de E . On note $E_{i,j}$ les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. À quelle condition une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle la matrice dans la base \mathcal{B} d'un projecteur de E ?
2. En déduire que pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ avec $i \neq j$, les matrices $E_{i,i}$ et $E_{i,i} + E_{i,j}$ sont des matrices de projecteurs.
3. Démontrer la propriété annoncée.

Exercice 19. ●●○

1. (question de quasi-cours) Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est une homothétie si et seulement si, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice n'ayant que des zéros sur la diagonale.

Exercice 20. *L'exercice précédent avec un très joli point de vue.* Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, qui n'est pas une homothétie, u l'endomorphisme canoniquement associé à A . On note $t = \text{Tr}(A)$ et on considère $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{K}^n$ vérifiant $t_1 + \dots + t_n = t$.

1. Démontrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x))$ est libre. *Si on a fait l'exercice précédent, on l'a déjà démontré.*

On complète $(x, u(x))$ en une base $(x, u(x), e_3, \dots, e_n)$.

2. On note $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n) = (x, u(x) - e_3 - \dots - e_n, e_3, \dots, e_n)$. Vérifier que \mathcal{B} est une base de E : quelle est la première colonne de la matrice de u dans cette base ?
3. On note $\mathcal{B}' = (f_1, f_2 + t_2 f_1, f_3 + t_3 f_1, \dots, f_n + t_n f_1)$. Vérifier que \mathcal{B}' est une base de E et démontrer que la matrice de u est à diagonale nulle.
4. En déduire que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Exercice 21. ●●○ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec $\dim E = 3$, tel que $f^2 = 2f - \text{Id}$, $f \neq \text{Id}$.

1. Montrer que f est inversible et calculer f^{-1} .
2. Montrer que $\text{Im}(f - \text{Id}) \subset \ker(f - \text{Id})$.

3. Montrer qu'il existe une base dans laquelle f a pour matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Calculer A^n .

Exercice 22. ●●○ Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ non constante égale à 0, non constante égale à 1 telle que pour toutes A et B , $f(AB) = f(A)f(B)$.

1. Déterminer $f(I_n)$ et $f(0)$.
2. Démontrer que si A est inversible, $f(A) \neq 0$.
3. Démontrer que si A n'est pas inversible, $f(A) = 0$.

Exercice 23. ●●○ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ X \mapsto AXA \end{cases}$.

1. Démontrer que φ est un isomorphisme si et seulement si A est inversible.
2. Dans le cas général, donner le rang de φ en fonction de celui de A .

4 Autres exercices

Exercice 24. ●○○ Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tous A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$. Montrer que $\varphi = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})}$.

Exercice 25. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation

$$X + X^T = \text{Tr}(X)A$$

d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 26. Sur l'application $AB - BA$. ●●● On considère l'application Ψ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$\Psi(A, B) = AB - BA.$$

1. I_n est-elle dans l'image de Ψ ?
2. Soit A tel qu'il existe B vérifiant $\Psi(A, B) = A$. Calculer $\text{Tr}(A^p)$ pour tout entier p .
3. Déterminer l'image de Ψ .

Exercice 27. ●●●

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer tous les endomorphismes de E tels que pour tout vecteur x la famille $(x, f(x))$ est liée. En déduire le centre de $\mathcal{L}(E)$ défini par

$$Z(\mathcal{L}(E)) = \{g \in \mathcal{L}(E); \forall f \in \mathcal{L}(E) \quad fg = gf\}$$

2. Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices A vérifiant $AM = MA$ pour toute matrice M .
3. Montrer que $T_{ij} = I_n + E_{ij}$ est inversible. En déduire que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet une base constituée de matrices inversibles.
4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ ayant même matrice dans toutes les bases de E . Identifier f .
5. Quel est le centre de $GL_n(\mathbb{K})$?

Exercice 28. X MP 2014. ●●● Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est idempotente si $A^2 = A$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ idempotente. Montrer que $\text{Tr}(A) = \text{rg}(A)$.
2. Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{R})$ de cardinal p . Soit $A = \sum_{M \in G} M$
 - (a) Vérifier que $\frac{A}{p}$ est idempotente.
 - (b) On suppose que $\text{Tr}(A) = 0$. Montrer que $A = 0$.
 - (c) Montrer que $\text{Tr}(A)$ est un entier divisible par p .
3. Soit $F = \{x \in \mathbb{R}^n, \forall M \in G, Mx = x\}$.
 - (i) Montrer que F est un sous-espace de \mathbb{R}^n de dimension égale à $\text{Tr}(A)/p$.
 - (ii) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, expliciter un sous-groupe G de $GL_2(\mathbb{R})$ de cardinal p .

Indications.

1.
 1. Partir de x_0 tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$ et partir d'une relation de liaison entre $(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$, à laquelle on applique suffisamment de fois f .
 2. Utiliser ou bien des produits matriciels, ou bien calculer $f^k(f^i(x_0))$.
 3. Utiliser le fait que $(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E . On peut, si $g \in \mathcal{L}(E)$ commute avec f , s'intéresser à déterminer la forme de la matrice de g dans cette base.
2.
 1. Remarquer qu'une matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente.
 2. Montrer d'abord des inclusions, puis des égalités (utiliser le théorème du rang).
 3. Utiliser que $\mathbb{C}_1[X] = \ker(\Delta^2)$.
 4. Prendre $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

5. Utiliser $v : \begin{cases} \mathbb{C}_1[X] \rightarrow \mathbb{C}_1[X] \\ x \mapsto v(x) \end{cases}$.
- 3 Utiliser le fait que A et B sont des matrices de symétries, donc sont semblables à des matrices bien connues !
- 4 **1.** Démontrer et utiliser le fait que g envoie $\ker(f - \text{Id}_E)$ sur $\ker(f + \text{Id}_E)$ et réciproquement.
2. Commencer par une base (e_1, \dots, e_n) de $\ker(f - \text{Id}_E)$ et regarder $g(e_1), \dots, g(e_n)$...
- 5 **1.** Utiliser le fait que M est équivalente à $J_{n,n,1}$, ou le fait que toutes les colonnes de M sont proportionnelles.
2. Utiliser l'équivalence à $J_{n,n,r}$.
3. Utiliser l'écriture matricielle !
4. Utiliser le fait qu'on doit avoir $f^2 = f$.
- 6 **1.** Le sens facile est le sens réciproque.
2. Commencer avec $A = J_{n,p,r}$ et $B = J_{n,p,s}$, et remarquer ce que fait $J_{n,p,s} \times J_{p,p,r}$.
- 7 **1.** Déterminer la matrice de l'application dans la base canonique ou dans une base adaptée à la décomposition $\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.
2. Écrire la matrice de φ dans la base canonique, bien ordonnée, i.e. dans $(E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \dots, E_{2n}, \dots)$
- 8 **1.** Injectivité + mêmes dimensions.
2. Commencer avec $A = J_r$, puis adapter.
- 9 Penser à utiliser la définition de l'écriture d'une matrice dans une base. Ensuite, pas nécessaire d'utiliser la matrice pour déterminer le noyau et l'image !
- 10 **1.** Ne pas oublier les deux parties du mot **endo-morphisme**.
2. Remarquer qu'il s'agit d'une famille de polynômes à degrés échelonnés.
3. On doit normalement trouver une famille diagonale.
4. Penser au fait qu'une matrice diagonale est inversible ssi ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.
- 11 **1.** Démontrer que (f_1, f_2) est libre.
2. Vérifier que $\varphi(f_1)$ et $\varphi(f_2)$ sont toujours dans E .
3. Normalement les images de f_1 et f_2 par φ ont déjà été calculées.
4. Calculer A^2, A^3 et faire une récurrence immédiate.
5. Utiliser la représentation matricielle.
6. Toute la difficulté réside dans la détermination de la constante de primitivation ! Elle doit notamment aboutir à une application linéaire.
7. (i) Normalement les calculs ont déjà été faits !
(ii)
- 12 Partir de $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $f^2(x) \neq 0$ et montrer que la famille $(x, f(x), f^2(x))$ est une base de E .
- 13 Utiliser des bases adaptées ! Partir par exemple d'une base du noyau, que l'on complète en une base de E . Ou, si on a $F \subset G \subset E$, partir d'une base de F , complétée en une base de G , complétée en une base de E .
- 16 **1.** Essayer de ne faire aucun calcul et utiliser l'expression de f .
2. Résoudre un système homogène.
3. Résoudre un système inhomogène.
4. (i) Inverer la matrice de $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ dans la base canonique.
(ii) Si vous avez suivi les indications, c'est la matrice que vous venez d'inverser !

5. (i)
(ii) Utiliser la question précédente!
6. Elle a déjà été calculée à la question (i).
17. 1. Utiliser le fait que deux matrices sont équivalentes **si et seulement si** elles ont même rang.
2. Montrer d'abord que $\varphi(A)$ est non nulle si A est inversible. Puis utiliser la question précédente.
18. 1. C'est du cours!
2. Faire un simple calcul.
3. Démontrer qu'on a trouvé ainsi une famille libre, donc une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et traduire ceci à l'aide de l'isomorphismes entre les applications linéaires et les matrices d'applications linéaires.
19. 1. Revoir le dernier exo du premier chapitre d'algèbre linéaire.
2. Faire une récurrence! En utilisant x tel que $(x, f(x))$ est libre, compléter cette famille en une base, et écrire la matrice de f dans cette base complétée. Elle doit commencer par un 0 en haut à gauche.
21. 1. Écrire $f \circ (\text{ une expression en } f) = \text{Id}$.
2. Déclarer proprement ses variables.
3. Montrer que $f - \text{Id}$ est de rang 1, compléter $\text{Im}(f - \text{Id})$ en une base de $\ker(f - \text{Id})$.
4. Calculer A^2 puis faire une récurrence immédiate.
22. 1. Élémentaire.
2. Idem.
3. Montrer que A est équivalente à une matrice nilpotente.
25. Raisonner par analyse-synthèse, prendre la trace et distinguer selon les valeurs de $\text{Tr}(A)$.
26. 1. Non!
2. Utiliser que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
3. Utiliser qu'une matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.
27. 1. On l'a déjà fait en classe!
2. On l'a déjà fait en TD!
3. Engendrer les E_{ij} avec les T_{ij}
4. Montrer que f est une homothétie.
5. Attention, toutes les homothéties ne sont pas inversibles.
28. 1. C'est du cours!
2. (a) Utiliser que $M \mapsto NM$ est une bijection (encore!)
(b) Utiliser le fait que la trace d'un projecteur est son rang.
(c) Idem.
3. (i) Utiliser le fait que A est un projecteur.
(ii) S'intéresser aux matrices $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.