

# MPSI1 – Programme de colles – Semaine 27 – du 18 au 22 mai 2026

## Fractions rationnelles

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
<b>Définitions</b>	
Corps $\mathbb{K}(X)$ . Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Fonction rationnelle. Degré, partie entière, zéros et pôles, multiplicités.	La construction de $\mathbb{K}(X)$ est hors programme.
<b>Décomposition en éléments simples sur <math>\mathbb{C}</math> et sur <math>\mathbb{R}</math></b>	
Existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$ .  Si $\lambda$ est un pôle simple, coefficient de $\frac{1}{X-\lambda}$ .  Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ .	La démonstration est hors programme. Toute technicité dans les exemples est exclue. Application au calcul de primitives, de dérivées $k$ -ièmes.

## Matrices

### A - Matrices et applications linéaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
<b>a) Matrice d'une application linéaire dans des bases</b>	
Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, d'un endomorphisme dans une base. Isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'un couple de bases. Isomorphisme d'espaces vectoriels et d'anneaux de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ induit par le choix d'une base. Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire. Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.	Exemple : matrice, dans la base $(1, i)$ de $\mathbb{C}$ vu comme plan vectoriel réel, de la similitude de multiplicateur $a + ib$ .  Cas particulier des endomorphismes.
<b>b) Application linéaire canoniquement associée à une matrice</b>	
Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Noyau, image et rang d'une matrice. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si et seulement si ses colonnes engendrent l'espace $\mathbb{K}^n$ ou si et seulement si son rang est $n$ . Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.	On identifie ici $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$ . Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau. Retour sur la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. Lien entre les diverses notions de rang.
<b>c) Systèmes linéaires</b>	
Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions. Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si $B$ appartient à l'image de $A$ . Si $A$ est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution.	Structure affine de l'ensemble des solutions.  Dans ce cas, le système est dit de Cramer.

## B - Changements de bases, équivalence et similitude

### CONTENUS

### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Changements de bases

Matrice de passage d'une base à une autre.

Inversibilité et inverse d'une matrice de passage.

Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur.

Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire.

Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.

Exemples de recherche d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple.

#### b) Matrices équivalentes et rang

Si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  est de rang  $r$ , il existe un couple de bases dans lequel  $u$  a pour matrice  $J_r$ .

Matrices équivalentes.

Une matrice est de rang  $r$  si et seulement si elle est équivalente à  $J_r$ .

Invariance du rang par transposition.

(FAIT LUNDI EN COURS) Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.

Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.

La matrice  $J_r$  a tous ses coefficients nuls à l'exception des  $r$  premiers coefficients diagonaux, égaux à 1.

Classification des matrices équivalentes par le rang.

Application : calcul du rang.

#### c) Matrices semblables et trace – COURS FAIT LUNDI 18/05 !

Matrices semblables.

Trace d'une matrice carrée.

Linéarité de la trace, relation  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ , invariance par similitude.

Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie. Linéarité, relation  $\text{tr}(uv) = \text{tr}(vu)$ .

Interprétation géométrique.

Exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.

Notation  $\text{tr}(A)$ .

Notation  $\text{tr}(u)$ .

Trace d'un projecteur.

**Organisation de la colle.** Cours et exos de fractions rationnelles et de matrices.

**Attention ! Les matrices semblables seront faites lundi matin en cours.**

**Exemples de questions de cours**

1. Formules pour les pôles simples.
2. Décomposition en éléments simples de  $\frac{P'}{P}$ .
3. Lien entre produit matriciel et composition d'applications linéaires.
4. Représentation d'un projecteur, d'une symétrie, dans une bonne base.
5. Soient  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -evdf de dimensions finies,  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $\mathcal{E}$  une base de  $E$ ,  $\mathcal{F}$  une base de  $F$ . Alors  $u$  est bijective (inversible) si et seulement si  $\text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u)$  est inversible.
6. Une famille  $\mathcal{B}$  de  $n$  vecteurs est une base si et seulement si  $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{B})$  est inversible.
7. Soient  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -evdf de dimensions respectives  $p$  et  $n$ ,  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $\mathcal{E}$  une base de  $E$ ,  $\mathcal{F}$  une base de  $F$ ,  $A = \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Alors une matrice  $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est équivalente à  $A$  si et seulement si il existe deux bases  $\mathcal{E}'$  et  $\mathcal{F}'$  de  $E$  et  $F$  telles que  $B = \text{Mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{F}'}(u)$ .
8. Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -evdf,  $n = \dim(E)$ ,  $p = \dim(F)$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r \leq \min(n, p)$ ,  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors  $\text{rg}(u) = r$  ssi  $\exists \mathcal{E}$  base de  $E$ ,  $\mathcal{F}$  base de  $F$  telles que  $\text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u) = J_{n,p,r}$ .
9. Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.
10. (à partir de mercredi) Le rang d'une matrice est la taille de la plus grande matrice extraite inversible.
11. (à partir de mercredi) Si  $u \in \mathcal{L}(E)$ , si  $\mathcal{E}$  est une base de  $E$ , si  $A = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$ , si  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  où  $n = \dim(E)$ , alors  $A$  et  $B$  sont semblables si et seulement s'il existe  $\mathcal{E}'$  base de  $E$  telle que  $B = \text{Mat}_{\mathcal{E}'}(u)$ .
12. (à partir de mercredi) Définition de la trace d'un endomorphisme (et vérifier qu'elle est effectivement bien définie).
13. (à partir de mercredi) Le rang d'un projecteur égale sa trace.