TD 24
Matrices et applications linéaires

Correction

Corrigé

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. *Endomorphismes cycliques*. ●●○ Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant

$$f^n = 0 \text{ et } f^{n-1} \neq 0$$

1. Justifier qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille $\mathscr{B} = \big(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\big)$ forme une base de E.

Correction

(Argument important) On sait que $f^{n-1} \neq 0$. Alors on dispose de x_0 dans E tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$. On montre alors que $\big(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\big)$ forme une base de E. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ des scalaires tels que

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 f(x_0) + \lambda_2 f^2(x_0) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x_0) = 0$$

On remarque qu'en appliquant f^{n-1}, on annule tout sauf le premier terme :

$$\lambda_0 f^{n-1}(x_0) + \lambda_1 f^n(x_0) + \cdots + \lambda_{2n-2} f^{2n-1}(x_0) = 0, \text{ i.e. } \lambda_0 u^{n-1}(x_0) = 0,$$

donc $\lambda_0 = 0$. On voit qu'alors pour conclure il faudrait faire une récurrence.
On peut faire sans : supposons que $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) \neq (0, \dots, 0)$. Alors l'ensemble $\{k \in [\![0, n-1]\!],\ \lambda_k \neq 0\}$ n'est pas vide et possède un plus petit élément k_0. La relation de liaison s'écrit alors

$$\sum_{i=k_0}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0$$

Composons alors la relation de liaison par u^{p-1-k_0}. Alors

$$f^{n-1-k_0} \circ \sum_{i=k_0}^{p-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0,$$

i.e. $\displaystyle\sum_{i=k_0}^{n-1} \lambda_i f^{n-1-k_0+i}(x_0) = 0$, donc $\lambda_{k_0} u^{n-1}(x_0) = 0$, donc $\lambda_{k_0} = 0$, absurde.
Donc la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est libre.

2. Déterminer les matrices de $f, f^2, \dots, f^{n-1}$ dans cette base.

Correction

Si $e_i = f^{i-1}(x_0)$, on remarque que pour tout i dans $[\![1, n-1]\!]$, $f(e_i) = e_{i+1}$ et $f(e_n) = 0$. Donc la

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

matrice de f dans $\mathscr{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Celle de f^2 est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

etc., jusqu'à celle de f^{n-1} qui est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Démontrer que $\{g \in \mathscr{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\} = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$

 nlaillet.math@gmail.com

Correction

Déjà, si $g \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$, alors on dispose de $(a_0, \dots, a_{n-1})$ tels que $g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$.
Alors
$$f \circ g = f \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f \circ f^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k \circ f = g \circ f,$$
d'où l'inclusion réciproque.
Ensuite, si $g \circ f = f \circ g$, déterminons la forme de la matrice de g dans la base $\mathscr{B}$. Déjà, $g(x_0) \in E$, donc on dispose de $a_1, \dots, a_n$ tels que $g(x_0) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$.
Soit i dans $[\![1, n]\!]$. Alors
$$g(e_j) = g(f^{j-1}(x_0)) \underset{\text{(commutation)}}{=} f^{j-1}(g(x_0)) = f^{j-1}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n-j+1} a_k e_{k+j} = \sum_{k=1}^{n-j+1} a_k e_{k+j},$$
donc la matrice de g dans $\mathscr{B}$ est
$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_n & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{i-1}),$$
donc $g = \sum_{i=1}^{n} a_i f^{i-1}$, d'où l'inclusion directe !

Exercice 2. *Sur l'opérateur de différence*. On considère l'opérateur de différence $\Delta : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{C}_n[X] & \to & \mathbb{C}_n[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}\right.$.

1. Représenter la matrice de Δ dans la base canonique au départ et à l'arrivée, et en déduire que Δ est nilpotent.
2. Déterminer, par un raisonnement matriciel, l'image et le noyau de Δ.

On va démontrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme u de $\mathbb{C}_n[X]$ tel que $u^2 = \Delta$. On suppose qu'un tel u existe.

3. Démontrer que u stabilise $\mathbb{C}_1[X]$.
4. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5. Conclure.

Exercice 3. ●●○ Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = B^2 = \mathrm{I}_n$. Démontrer que A et B sont semblables si et seulement si elles ont même trace.

Correction

A et B sont toutes les deux des matrices de symétrie, donc on dispose de r et de s tels que A est semblable à $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & -\mathrm{I}_{n-r} \end{pmatrix}$ et B est semblable à $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_s & 0_{s,n-s} \\ 0_{n-s,s} & -\mathrm{I}_{n-s} \end{pmatrix}$. Donc

- si A et B sont semblables, alors elles ont même trace.
- si $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$, alors $r - (n-r) = s - (n-s)$, i.e. $2r - n = 2s - n$, donc $r = s$, donc A et B sont semblables.

Exercice 4. *Couple de symétries qui anticommutent*. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f, g des endomorphismes de E tels que $f^2 = g^2 = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

1. Montrer que la dimension de E est paire.
2. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{E}$ de E t.q. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. ●◐○

1. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. Montrer qu'il existe X et Y dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que $M = XY^T$.

Correction

Deux manières d'aborder la question :

- M est de rang 1 donc elle est équivalente à $J_{n,n,1}$, donc on dispose de P et Q inversibles telles que $M = PJ_{n,n,1}Q$. Or, $J_{n,n,1} = J_{n,1,1} \times J_{1,n,1}$, avec, on le rappelle, $J_{n,1,1} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $J_{1,n,1} \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$. Donc $M = PJ_{n,1,1} \times J_{1,n,1}Q$ avec $X = PJ_{n,1,1} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Y = {}^t(J_{1,n,1}Q) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Donc $M = X{}^tY$.
- Plus concrètement, M est de rang 1 donc M possède une colonne non nule X. Maintenant, toutes les colonnes de M sont proportionnelles à X. Posons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de M. Alors pour tout i on dispose de $y_i \in \mathbb{K}$ tel que $C_i = y_i X$. Donc

$$M = (y_1X \ y_2X \ \cdots \ y_nX) = X(y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n) = X{}^tY,$$

où $Y = (y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n)$.

2. Prouver que toute matrice A de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r s'écrit comme somme de r matrices de rang 1, et donc qu'il existe $X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_r$ $2r$ matrices de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $A = \sum_{i=1}^{r} X_i Y_i^T$.

Correction

On utilise l'équivalence à $J_{n,n,r}$: on dispose de P et Q inversibles telles que $M = PJ_{n,n,r}Q$, donc

$$M = \sum_{i=1}^{r} JE_{ii}Q,$$

où E_{ii} est la matrice élémentaire à la position (i, i). Donc M est bien somme de r matrices de rang 1.

3. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de df et $f \in \mathscr{L}(E)$ de rang 1. Montrer que $f^2 = \mathrm{Tr}(f)f$.
4. À quelle condition un endomorphisme de rang 1 est-il un projecteur ?

Exercice 6. Soient A et $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On souhaite montrer que

$$\mathrm{rg}(B) \leqslant \mathrm{rg}(A) \Leftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{K}), \exists Q \in M_p(\mathbb{K}) / B = PAQ$$

1. Trouver le sens facile et le démontrer.
2. Faire le sens plus difficile, en commençant par le cas où A et B sont les matrices les plus simples possibles.

Exercice 7. *Endomorphismes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*. ●●○

1. Déterminer la trace de l'application de transposition sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Correction

Il suffit de déterminer la matrice de $\varphi : M \mapsto {}^tM$ dans une base de notre choix de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Deux possibilités.

- Dans la base canonique, on remarque que $\varphi(E_{ii}) = E_{ii}$ et que $\varphi(E_{ij}) = E_{ji}$ si $i \neq j$, donc les seuls termes diagonaux de la matrice considérée seront ceux des colonnes des E_{ii}, d'où une trace égale à n.
- La transposition est une symétrie, donc dans une base adaptée aux deux espaces caractéristiques de la symétrie, $\mathscr{S}_n \oplus \mathscr{A}_n$, on obtient une matrice avec $\dim(\mathscr{S}_n)$ « 1 » et $\dim(\mathscr{A}_n)$ « -1 » , d'où une trace de $\dfrac{n(n+1)}{2} - \dfrac{n(n-1)}{2} = n$.

2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et φ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ défini par : $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = MA$. Déterminer $\mathrm{Tr}(\varphi)$.

Correction

On écrit la matrice de φ dans la base canonique, bien ordonnée, i.e. dans

$$(E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \dots E_{2n}, \dots)$$

Dans cette base, la matrice de φ est, par blocs,

$$\begin{pmatrix} A & 0_n & \cdots & 0_n \\ 0_n & A & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_n & \cdots & 0_n & A \end{pmatrix}, \text{ de trace } n\mathrm{Tr}(A).$$

Exercice 8. *Tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$.*

1. Montrer que $\left\{ \begin{array}{ccc} M_n(K) & \to & M_n(K)^* \\ A & \mapsto & (X \mapsto \mathrm{tr}(AX)) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

2. En déduire que tout hyperplan de $M_n(K)$ contient une matrice inversible.

Stratégie/exercices conseillés. En sus des exercices faits en cours, il faut à mon avis :

- parler de base adaptée (13 ou 17),
- faire un exercice avec une application linéaire sur les polynômes (10),
- faire un exercice un peu fin de changement de base (19),
- étudier au moins une fois un commutateur ($AB - BA$) : exercice 26.

Si vous avez du mal, concentrez-vous sur les exercices 16 et 9.

2 Matrice d'une application linéaire dans une base

Exercice 9. ●◐○ Déterminer dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ la matrice de l'endomorphisme $f : P \mapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$. Déterminer le noyau et l'image de cette application linéaire.

Correction

Calculons les images des éléments de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ par f :

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

- $f(1) = 1 + 1 - 2 = 0$.
- $f(X) = X + 1 + X - 1 - 2X = 0$.
- $f(X^2) = (X+1)^2 + (X-1)^2 - 2X^2 = X^2 + 2X + 1 + X^2 - 2X + 1 - 2X^2 = 2$.
- $f(X^3) = (X+1)^3 + (X-1)^3 - 2X^3 = X^3 + 3X^2 + 3X + 1 + X^3 - 3X^2 + 3X - 1 - 2X^3 = 6X$.

Donc la matrice de f dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice est déjà échelonnée : on lit directement que $\ker(f) = \mathrm{Vect}(1, X)$ et que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(2, 6X) = \mathrm{Vect}(1, X)$.

Exercice 10. ●○○ Soit $f_\alpha : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & (1+X)P' - \alpha P \end{array} \right.$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $f_\alpha \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

Correction

. Déjà, f_α est linéaire. Soient P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$, λ et μ dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f_\alpha(\lambda P + \mu Q) &= (1+X)(\lambda P + \mu Q)' - \alpha(\lambda P + \mu Q) \\ &= (1+X)(\lambda P' + \mu Q') - \alpha(\lambda P + \mu Q) \\ &= (1+X)\lambda P' + (1+X)\mu Q' - \alpha\lambda P - \alpha\mu Q \\ &= \lambda((1+X)P' - \alpha P) + \mu((1+X)Q' - \alpha Q) \\ &= \lambda f_\alpha(P) + \mu f_\alpha(Q), \end{aligned}$$

d'où la linéarité.
. Ensuite, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg((1+X)P') \leqslant 1 + n - 1 = n$, donc $\deg((1+X)P' - \alpha P) \leqslant n$.
Donc f_α est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer que $\mathscr{B} = (1, 1+X, (1+X)^2, \dots, (1+X)^n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Correction

La famille $(1, 1+X, (1+X)^2, \dots, (1+X)^n)$ est une famille de $n+1$ polynômes non nuls à degrés échelonnés, donc est libre. De cardinal n dans un espace de dimension n, elle est donc une base de cet espace.

3. Déterminer la matrice A_α de f_α dans la base précédente.

Correction

Soit k dans $[\![0, n]\!]$. Alors

$$f_\alpha((1+X)^k) = (1+X)k(1+X)^{k-1} - \alpha(1+X)^k = (k-\alpha)(1+X)^k,$$

d'où $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f_\alpha)$ est la matrice diagonale de diagonale $(-\alpha, 1-\alpha, 2-\alpha, \dots, n-\alpha)$.

4. À quelle condition sur α l'endomorphisme f_α est-il inversible ?

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Correction

f_α est inversible si et seulement si A_α est inversible. Une matrice diagonale étant inversible ssi ses termes diagonaux sont tous non nuls, A_α est inversible si et seulement si $\alpha \notin [\![0, n]\!]$.

Exercice 11. ●●○ Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par les fonctions f_1 et f_2 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = \mathrm{e}^{-x},\ f_2(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Quelle est la dimension de E ?

Correction

On montre que E est de dimension 2, en vérifiant que (f_1, f_2) est libre : soient λ et μ tels que $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$. En évaluant en 0, on obtient $\lambda = 0$. En évaluant ensuite en 1, on obtient $\mu \mathrm{e}^{-1} = 0$ donc $\mu = 0$. Donc (f_1, f_2) est libre, de cardinal 2, donc elle engendre un sous-espace vectoriel de dimension 2.

2. Montrer que $\varphi : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de E.

Correction

On dérive f_1 et f_2 et on montre que leurs dérivées sont toujours dans E. Pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= -\mathrm{e}^{-x} = -f_1(x) \\ f_2'(x) &= \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = f_1 - f_2. \end{aligned}$$

Donc $\varphi(f_1) \in E$ et $\varphi(f_2) \in E$ donc φ est à valeurs dans E. Ensuite, par linéarité de la dérivation, φ est linéaire.

3. Écrire la matrice représentative A de φ dans la base $\mathscr{B} = (f_1, f_2)$ de E.

Correction

On a déjà calculé les images de vecteurs de $\mathscr{B}$ par φ, donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Calculer A^n pour tout entier naturel n.

Correction

On remarque que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, et, par récurrence immédiate, $A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Soit $f : x \mapsto (3x+1)\mathrm{e}^{-x}$. Calculer $f^{(n)}$ pour tout entier naturel n.

Correction

On utilise la représentation matricielle ! $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{(n)}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi^n(f)) = A^n \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} 1-3n \\ 3 \end{pmatrix},$$

donc $f^{(n)} : x \mapsto (-1)^n(1-3n+3x)\mathrm{e}^{-x}$.

6. Montrer que tout élément f de E admet une unique primitive F élément de E et que $\psi : f \mapsto F$ est un endomorphisme de E.

Correction

Soit f dans E, $f = a\mathrm{e}^{-x} + bx\mathrm{e}^{-x}$. Alors

$$\int_0^x f(t)dt = a\int_0^x \mathrm{e}^{-t}dt + b\int_0^x t\mathrm{e}^{-t}dt$$

Par intégration par parties ($u(t) = t$, $u'(t) = 1$, $v'(t) = \mathrm{e}^{-t}$, $v(t) = -\mathrm{e}^{-t}$,

$$\int_0^x t\mathrm{e}^{-t}dt = -x\mathrm{e}^{-x} - \int_0^x -\mathrm{e}^{-t}dt = -x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + 1,$$

donc

$$\int_0^x f(t)dt = -a\mathrm{e}^{-x} - bx\mathrm{e}^{-x} - b\mathrm{e}^{-x} + b = (-a-b)\mathrm{e}^{-x} - bx\mathrm{e}^{-x} + b,$$

donc les primitives de f sont de la forme $x \mapsto (-a-b)\mathrm{e}^{-x} - bx\mathrm{e}^{-x} + K$ avec K constante. La seule appartenant à $\mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ est celle avec $K = 0$, i.e. $x \mapsto (-a-b)\mathrm{e}^{-x} - bx\mathrm{e}^{-x}$. Cette application est bien un endomorphisme car on vient de démontrer que pour tous a et b,

$$\psi(af_1 + bf_2) = (-a-b)f_1 - bf_2.$$

7. (i) Déterminer la matrice B de ψ dans la base $\mathscr{B}$.

Correction

On a déjà fait les calculs ! $\psi(f_1) = -f_1$ et $\psi(f_2) = -f_1 - f_2$. Donc la matrice de ψ dans $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(ii) Quel lien y a-t-il entre A et B ?

Correction

On calcule : $AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A et B sont inverses l'une de l'autre.

Exercice 12. ●◐○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Correction

On suppose $f^2 \neq 0$. Soit $x \in E$ tel que $f^2(x) \neq 0$. Alors $f(x) \neq 0$ et la famille $(x, f(x), f^2(x))$ est libre. En effet, soient λ, μ, ν trois éléments de $\mathbb{K}$ tels que

$$\lambda x + \mu f(x) + \nu f^2(x) = 0.$$

Composons l'égalité précédente par f^2. On a alors $f^2(\lambda x + \mu f(x) + \nu f^2(x)) = 0$, soit

$$\lambda f^2(x) + \mu f^3(x) + \nu f^4(x) = 0.$$

Or, $f^3(x) = 0$, $f^4(x) = f^3(f(x)) = 0$, donc $\lambda f^2(x) = 0$, donc, comme $f^2(x) \neq 0$, $\lambda = 0$. Donc $\mu f(x) + \nu f^2(x) = 0$. En composant par f, on obtient $\mu f^2(x) + \nu f^3(x) = 0$, donc $\mu f^2(x) = 0$, donc $\mu = 0$. Donc $\nu f^2(x) = 0$, donc $\nu = 0$. Donc la famille $(x, f(x), f^2(x))$ est libre, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Dans cette base, la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 13. ●●○ Soit u un endomorphisme de E $\mathbb{K}$-evdf. Représenter $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u)$ dans une base $\mathscr{E}$ qui fasse apparaître le plus de zéros possible, lorsque...

1. $u^2 = 0$.

Correction

Si $u^2 = 0$, alors $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$. Soit $n = \dim(E)$ et $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}(u)$. On la complète en une base de E. Alors, dans cette base, la matrice A de u est

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,r+1} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2,r+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r,r+1} & \dots & a_{r,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Les premières colonnes de 0 sont dues au fait que pour tout i, $u(e_i) = 0$, les dernières lignes sont dues au fait que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$. De plus, par le théorème du rang, $n = r + \dim(\ker(u)) \geqslant r + r$ donc $r \leqslant \dfrac{n}{2}$.

Mais, si l'on considère S un supplémentaire de $\ker(u)$, $(e_1, \dots, e_r)$ une base de S, $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$. On la complète en une base de $\ker(u)$, puis de E. La matrice obtenue, beaucoup plus simple, est

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & & (0) \\ 0 & \cdots & 0 & & \dots & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & (0) & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

2. $\mathrm{Im}(u) = \ker(u)$.

Correction

Si $\mathrm{Im}(u) = \ker(u)$, alors on est dans la situation précédente avec $2r = n$, i.e. n pair et $r = \dfrac{n}{2}$.

3. $\mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u) = E$.

Correction

ATTENTION ! On n'a pas nécessairement un projecteur ! Toujours penser qu'une homothétie satisfait $\mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u) = E$, mais n'est un projecteur que si elle est nulle ou l'identité.

En revanche, si l'on prend $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}(u)$ et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $\ker(u)$, alors $(e_1, \dots, e_n)$ est adaptée à la décomposition $\mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u) = E$. Dans cette base, la matrice A de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,r} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,r} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,r} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

4. $\ker(u)$ est un hyperplan de E.

Correction

Si $\ker(u)$ est un hyperplan de E, alors $\mathrm{rg}(u) = \dim(E) - \dim(\ker(u)) = 1$, donc u est de rang 1. Soit $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de $\ker(u)$. Soit $e_n \notin \ker(u)$. Alors (propriété du cours sur les hyperplans) $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E. Or, $u(e_i) = 0$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ et $u(e_n) \in E$ donc on dispose de $a_1, \ldots, a_n$ des scalaires tels que $u(e_n) = a_1 e_1 + \ldots a_n e_n$. Donc, dans cette base, la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

Exercice 14. ●●○

1. Soit $u \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^{2n}\right)$ tel que $u^2 = 0$ et $\mathrm{rg}(u) = n$. Montrer que $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, u$. En déduire que u peut être représentée par $\begin{pmatrix} 0_n & \mathrm{I}_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$.

2. Soit $u \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^{3n}\right)$ tel que $u^3 = 0$ et $\mathrm{rg}(u) = 2n$. Montrer que $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, u^2$. En déduire que u peut être représentée par $\begin{pmatrix} 0_n & \mathrm{I}_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & \mathrm{I}_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}$.

Exercice 15. ●●◐ Soient E un $\mathbb{K}$-evdf p, F un $\mathbb{K}$-evdf n. Soit A un sous-espace vectoriel de E de dimension a, B un sous-espace vectoriel de B de dimension b.

1. Soit $\mathcal{K}_A = \{u \in \mathscr{L}(E, F),\ A \subset \ker(u)\}$. Démontrer que $\mathcal{K}_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E, F)$ et en déterminer la dimension (on pourra déterminer la forme de la matrice de $u \in \mathcal{K}_A$ dans une base adaptée à A).

2. Soit $\mathcal{I}_B = \{u \in \mathscr{L}(E, F),\ \mathrm{Im}(u) \subset B\}$. Démontrer que $\mathcal{I}_B$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E, F)$ et en déterminer la dimension.

3 Matrices de passage – matrices semblables et équivalentes

Exercice 16. ●○○ Dans cet exercice on notera $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (2x - 2y + 2z, -x + y - 2z, -2x + 2y - 3z)$$

1. Donner la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$ au départ et à l'arrivée.

Correction

La matrice de f dans $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Donner une base du noyau de f.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Correction

On résout

$$\begin{cases} 2x-2y+2z=0 \\ -x+y-2z=0 \\ -2x+2y-3z=0 \end{cases} \underset{L_1\leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \begin{cases} -x+y-2z=0 \\ 2x-2y+2z=0 \\ -2x+2y-3z=0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+2L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\longrightarrow} \begin{cases} -x+y-2z=0 \\ -2z=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+2L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\longrightarrow} \begin{cases} x=\alpha \\ z=0 \\ y=\alpha, \end{cases}$$

Donc $\ker(f)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

3. Donner une équation de l'image de f.

Correction

Cette fois on résout un système linéaire inhomogène. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Alors $(a,b,c)\in\mathrm{Im}(f)$ ssi il existe (x,y,z) tel que $f(x,y,z)=(a,b,c)$. On résout donc :

$$\begin{cases} 2x-2y+2z=a \\ -x+y-2z=b \\ -2x+2y-3z=c \end{cases} \underset{L_1\leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \begin{cases} -x+y-2z=b \\ 2x-2y+2z=a \\ -2x+2y-3z=c \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+2L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\longrightarrow} \begin{cases} -x+y-2z=b \\ -2z=a+2b \\ z=c-2b \end{cases}$$

$$\underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{cases} -x+y-2z=b \\ z=c-2b \\ -2z=a+2b \end{cases}$$

$$\underset{L_3\leftrightarrow L_3+2L_2}{\longrightarrow} \begin{cases} -x+y-2z=b \\ z=c-2b \\ 0=a-2b+2c, \end{cases}$$

d'où une unique condition de compatibilité : $a-2b+2c=0$, donc

$$\mathrm{Im}(f)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ a-2b+2c=0\}.$$

4. On considère les vecteurs $u_1=e_1+e_2$, $u_2=e_2+e_3$ et $u_3=-2e_1+e_3$.

(i) Montrer que $\mathscr{B}'=(u_1,u_2,u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Correction

On montre que la matrice des vecteurs (u_1, u_2, u_3) est inversible (comme ça on aura répondu à la dernière question) :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&1&0&0\\0&1&2&-1&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)$$
$$\underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&1&0&0\\0&1&2&-1&1&0\\0&0&-1&1&-1&1\end{array}\right)$$
$$\underset{L_3\leftarrow -L_3}{\longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&1&0&0\\0&1&2&-1&1&0\\0&0&1&-1&1&-1\end{array}\right)$$
$$\underset{\substack{L_1\leftarrow L_1+2L_3\\L_2\leftarrow L_2-2L_3}}{\longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&2&-2\\0&1&0&1&-1&2\\0&0&1&-1&1&-1\end{array}\right)$$

donc $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Quelle est la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$?

Correction

Il s'agit de la matrice que l'on vient d'inverser : $\begin{pmatrix}1&0&-2\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$.

5. (i) Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$, et $f(u_3)$ en fonction de u_1, u_2, u_3.

Correction

On calcule :

$$\begin{aligned}f(u_1)&=f(1,1,0)=0\\f(u_2)&=f(0,1,1)=(0,-1,-1)=-u_2\\f(u_3)&=f(-2,0,1)=(-2,0,1)=u_3.\end{aligned}$$

(ii) Quelle est la matrice $C=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ de f dans la base B' ?

Correction

On en déduit que $C=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

6. Calculer P^{-1}.

Correction

Déjà calculée ! C'est $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 17. ●○○

1. Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui n'est pas inversible est équivalente à une matrice nilpotente.

Correction

Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, non inversible. Soit $r = \mathrm{rg}(A)$. Alors $r < n$. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors B est nilpotente et de rang r, donc est équivalente à A.

2. Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ non constante telle que : $\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, $f(AB) = f(A)f(B)$. Montrer que A est inversible si et seulement si $f(A) \neq 0$.

Exercice 18. ●◐○ Soit E un espace vectoriel de dimension n. On souhaite démontrer qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de projecteurs. On fixe une base $\mathcal{B}$ de E. On note $E_{i,j}$ les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. À quelle condition une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle la matrice dans la base $\mathcal{B}$ d'un projecteur de E ?

Correction

Il suffit d'avoir $M^2 = M$.

2. En déduire que pour tout $i, j \in \{1, \dots n\}$ avec $i \neq j$, les matrices $E_{i,i}$ et $E_{i,i} + E_{i,j}$ sont des matrices de projecteurs.

Correction

On fait le calcul : $E_{i,i}^2 = E_{ii}$, donc E_{ii} est une matrice de projecteur.
Ensuite, $(E_{ii} + E_{ij})^2 = E_{ii}^2 + E_{ii}E_{ij} + E_{ij}E_{ii} + E_{ij}^2 = E_{ii}^2 + E_{ii}E_{ij} = E_{ii} + E_{ij}$, car, on le rappelle,

$$E_{ij}E_{k\ell} = \delta_{jk}E_{i\ell}.$$

3. Démontrer la propriété annoncée.

Correction

Il nous reste à démontrer que la famille des $(A_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où $Aii = E_{ii}$ et, si $i \neq j$, $A_{ij} = E_{ii} + E_{ij}$, est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Comme elle contient n^2 éléments, on motnre simplement qu'elle est libre.
Soit $(a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une famille de scalaires tels que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}A_{ij} = 0$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}A_{ii} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} A_{ij} = 0,$$

donc

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}E_{ii} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} a_{ij}E_{ii} + a_{ij}E_{ij} = 0,$$

donc

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) E_{ii} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}} a_{ij}E_{ij} = 0,$$

donc, par la liberté des (E_{ij}), $a_{ij} = 0$ pour tout $j \neq i$, donc $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}E_{ii} = 0$ donc pour tout i, $a_{ii} = 0$.

Donc la famille est libre, donc est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ formée de matrices de projecteurs.
On en déduit, en prenant une base $\mathscr{E}$ de E et en considérant les applications linéaires α_{ij} telles que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(\alpha_{ij}) = A_{ij}$, une base de $\mathscr{L}(E)$ constituée de projecteurs.

Exercice 19. ●●◐

1. (question de quasi-cours) Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est une homothétie si et seulement si, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

Correction

Si f est une homothétie, on dispose de λ tel que pour tout x de E, $f(x) = \lambda x$, donc $(x, f(x))$ est liée.
Si pour tout x de E, $(x, f(x))$ est liée, pour tout x de E non nul on dispose de λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$. Soient alors $x \neq y$ deux éléments de E non nuls. On a alors $f(x) = \lambda_x x$ et $f(y) = \lambda_y y$.

- Si x et y sont colinéaires, alors on dispose de μ non nul tel que $y = \mu x$, donc $f(y) = \mu\lambda_x x$, et $f(y) = \lambda_y y = \lambda_y \mu x$. Comme y est non nul, $\mu\lambda_x = \lambda_y\mu$, et comme $\mu \neq 0$, $\lambda_x = \lambda_y$.
- Si x et y ne sont pas colinéaires, la famille (x, y) est libre. Or $f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y)$ d'une part, et $f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x f(x) + \lambda_y f(y)$ d'autre part. Donc

$$\lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y = \lambda_x x + \lambda_y y,$$

  donc, comme la famille (x, y) est libre, $\lambda_{x+y} = \lambda_x$ et $\lambda_{x+y} = \lambda_y$, donc $\lambda_x = \lambda_y$.

Donc pour tous x, y dans E, $\lambda_x = \lambda_y$. Donc on dispose de $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout x de E, $f(x) = \lambda x$, donc f est une homothétie.

2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice n'ayant que des zéros sur la diagonale.

Correction

3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}$ dont A est la matrice dans la base canonique.
Si f est une homothétie, alors $A = \lambda I_n$, donc, comme $\mathrm{Tr}(A) = 0$, $n\lambda = 0$, donc $\lambda = 0$ et A est nulle.
Si f n'est pas une homothétie, alors par la question précédente on dispose de x tel que $(x, f(x))$ est libre. Complétons cette famille en une base de $\mathbb{R}^n$. Alors la matrice de A dans cette base (au départ et à l'arrivée) est

$$\begin{pmatrix} 0 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & & & \\ 0 & & B & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

 nlaillet.math@gmail.com

où B est une matrice de $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, de trace nulle ! Ceci nous encourage à démontrer le résultat par récurrence sur n la taille de la matrice !

Initialisation. Pour $n=1$ le résultat est trivial puisque la seule matrice qui convienne est la matrice nulle.

Hérédité. Supposons la proposition vraie pour un certain n et soit A de taille $n+1$. Par la question précédente, A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & & & \\ 0 & & B & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

avec B de trace nulle. Donc B est semblable à une matrice M de trace nulle par hypothèse de récurrence, i.e. il existe P inversible telle que $M = P^{-1}BP$. Posons $Q = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ 0 & \\ (0) & P \\ 0 & \end{pmatrix}$. Par les règles de calcul par blocs, Q est inversible d'inverse $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ 0 & \\ (0) & P^{-1} \\ 0 & \end{pmatrix}$, et

$$Q^{-1}\begin{pmatrix} 0 & (a_i) \\ 1 & \\ (0) & B \\ 0 & \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} 0 & (a_i) \\ 0 & \\ (0) & P^{-1}B \\ 0 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & (0) \\ 0 & \\ (0) & P \\ 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (b_i) \\ 1 & \\ (0) & M \\ 0 & \end{pmatrix},$$

où $(b_2 \cdots b_{+1}) = (a_2 \cdots a_{n+1}) \times P$. Donc A est semblable à une matrice de trace nulle et le résultat est démontré.

Exercice 20. *L'exercice précédent avec un très joli point de vue*. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, qui n'est pas une homothétie, u l'endomorphisme canoniquement associé à A. On note $t = \mathrm{Tr}(A)$ et on considère $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{K}^n$ vérifiant $t_1 + \dots + t_n = t$.

1. Démontrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x))$ est libre. *Si on a fait l'exercice précédent, on l'a déjà démontré.*

On complète $(x, u(x))$ en une base $(x, u(x), e_3, \dots, e_n)$.

2. On note $\mathscr{B} = (f_1, \dots, f_n) = (x, u(x) - e_3 - \dots - e_n, e_3, \dots, e_n)$. Vérifier que $\mathscr{B}$ est une base de E : quelle est la première colonne de la matrice de u dans cette base ?

3. On note $\mathscr{B}' = (f_1, f_2 + t_2 f_1, f_3 + t_3 f_1, \dots, f_n + t_n f_1)$. Vérifier que $\mathscr{B}'$ est une base de E et démontrer que la matrice de u est à diagonale nulle.

4. En déduire que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Exercice 21. ●●○ Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, avec $\dim E = 3$, tel que $f^2 = 2f - \mathrm{Id}$, $f \neq \mathrm{Id}$.

1. Montrer que f est inversible et calculer f^{-1}.

Correction

On sait que $f^2 = 2f - \mathrm{Id}$, donc $2f - f^2 = \mathrm{Id}$, donc $(2\mathrm{Id} - f) \circ f = \mathrm{Id}$ donc f est inversible, d'inverse $2\mathrm{Id} - f$.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}) \subset \ker(f - \mathrm{Id})$.

 nlaillet.math@gmail.com

Correction

Soit x dans $\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})$. Alors on dispose de a dans E tel que $x = f(a) - a$. Alors

$$(f-\mathrm{Id})(x) = f(x) - x = f(f(a)-a) - f(a) + a = f^2(a) - 2f(a) + a = 0,$$

par hypothèse.
Donc $\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}) \subset \ker(f-\mathrm{Id})$.

3. Montrer qu'il existe une base dans laquelle f a pour matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction

On sait, par le théorème du rang, que $\dim(\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})) + \dim(\ker(f-\mathrm{Id})) = 3$.
De plus, $\dim(\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})) \leqslant \dim(\ker(f-\mathrm{Id}))$ (par la question précédnete), donc $\dim(\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})) + \dim(\ker(f-\mathrm{Id}))$
Donc nécessairement, comme $f \neq \mathrm{Id}$, $\dim(\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})) = 1$ et $\dim(\ker(f-\mathrm{Id})) = 2$. Donc $f-\mathrm{Id}$ est de rang 1. Soit a une base de $\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})$, que l'on complète en une base (a,b) de $\ker(f-\mathrm{Id})$, et c un antécédent de a par $f-\mathrm{Id}$. Alors dans la base (b,a,c), la matrice de $f-\mathrm{Id}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Calculer A^n.

Correction

On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on montre (récurrence) que : $\forall n, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 22. ●●◐ Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ non constante égalle à 0, non constante égale à 1 telle que pour toutes A et B, $f(AB) = f(A)f(B)$.

1. Déterminer $f(\mathrm{I}_n)$ et $f(0)$.

Correction

Déjà, $f(\mathrm{I}_n) = f(\mathrm{I}_n^2) = f(\mathrm{I}_n)^2$, donc $f(\mathrm{I}_n) = 0$ ou 1. Si $f(\mathrm{I}_n) = 0$, alors pour tout A, $f(A) = f(A\mathrm{I}_n) = f(A)f(\mathrm{I}_n) = 0$, absurde car f n'est pas constante égale à 0. $\boxed{\text{Donc } f(\mathrm{I}_n) = 1.}$
Ensuite, de même, $f(0) = f(0^2) = f(0)^2$ donc $f(0) = 0$ ou 1. Si $f(0) = 1$, alors pour toute A, $f(A) = f(A) \times 1 = f(A)f(0) = f(A \times 0) = f(0) = 1$, absurde car f n'est pas constante égale à 1. $\boxed{\text{Donc } f(0) = 0.}$

2. Démontrer que si A est inversible, $f(A) \neq 0$.

Correction

Si A est inversible, on dispose de B telle que $AB = \mathrm{I}_n$. Alors $f(A)f(B) = f(\mathrm{I}_n) = 1$ donc $f(A) \neq 0$.

3. Démontrer que si A n'est pas inversible, $f(A) = 0$.

Correction

Si A n'est pas inversible, alors A est équivalente à une matrice nilpotente N (cf. exo 17), i.e. on dispose de P, Q inversibles telles que $A = PNQ$. Alors $f(A) = f(P)f(N)f(Q)$.
Mais N est nilpotente, donc $N^n = 0$ (on sait que si N est nilpotente, son indice de nilpotence est inférieur à la dimension des matrices), donc $f(N)^n = 0$ donc $f(N) = 0$. Donc $f(A) = 0$.

Exercice 23. ●●◐ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\varphi : \left| \begin{array}{c} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ X \mapsto AXA \end{array} \right.$.

1. Démontrer que φ est un isomorphisme si et seulement si A est inversible.
2. Dans le cas général, donner le rang de φ en fonction de celui de A.

4 Autres exercices

Exercice 24. ●○○ Soit φ une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tous A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$. Montrer que $\varphi = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})),\mathbb{K}}$.

Exercice 25. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation

$$X + X^T = \text{Tr}(X)A$$

d'inconnue $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 26. *Sur l'application $AB - BA$.* ●●◐ On considère l'application Ψ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$\Psi(A, B) = AB - BA.$$

1. I_n est-elle dans l'image de Ψ ?

Correction

NON ! Soit $M \in \text{Im}(\Psi)$. Alors on dispose de A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(AB - BA) = \text{Tr}(AB) - \text{Tr}(BA) = \text{Tr}(AB) - \text{Tr}(AB) = 0$, et $\text{Tr}(\mathrm{I}_n) \neq 0$.

2. Soit A tel qu'il existe B vérifiant $\Psi(A, B) = A$. Calculer $\text{Tr}(A^p)$ pour tout entier p.

Correction

Déjà, $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(AB - BA) = 0$. Ensuite, si p est dans $\mathbb{N}$,

$$\text{Tr}(A^p) = \text{Tr}(A^{p-1}(AB - BA)) = \text{Tr}(A^pB) - \text{Tr}(A^{p-1}BA) = \text{Tr}(A^pB) - \text{Tr}(A^pB) = 0.$$

3. Déterminer l'image de Ψ.

Correction

On va montrer que $\text{Im}(\Psi)$ est l'ensemble des matrices de trace nulle. Déjà, $\text{Im}(\Psi) \subset \ker(\text{Tr})$. Pour montrer l'inclusion réciproque, **ON NE PEUT PAS** raisonner avec les dimensions. On montre donc l'inclusion réciproque. Soit M de trace nulle. Alors M est semblable à N de diagonale nulle (exercice précédente). On va essayer d'écrire $M = AB - BA$ où $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$. Ceci devient simple : si $\mathscr{D}_n^0(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices de diagonale nulle, si

$$\Phi_A : \begin{array}{c} \mathscr{D}_n^0(\mathbb{K}) \to \mathscr{D}_n^0(\mathbb{K}) \\ B \mapsto AB - BA \end{array},$$

$\ker(\Phi_A) = \{B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ AB = BA\}$. On a vu, dans le TD sur les matrices, que si A était diagonale avec tous ses coefficients non nuls et deux à deux distincts, alors B était diagonale. Mais si B est de diagonale nulle, alors B est nulle. Donc Φ_A est injective, donc surjective. Donc on dispose de B tel que $AB - BA = N$. Mais $M = PNP^{-1}$, donc $M = PABP^{-1} - PBAP^{-1} = (PAP^{-1})(PBP^{-1}) - (PBP^{-1})(PAP^{-1})$ d'où le résultat !

Exercice 27. ●●◐

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer tous les endormorphismes de E tels que pour tout vecteur x la famille $(x, f(x))$ est liée. En déduire le centre de $\mathcal{L}(E)$ défini par
$$Z(\mathcal{L}(E)) = \{g \in \mathcal{L}(E); \forall f \in \mathcal{L}(E) \quad fg = gf\}$$
2. Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices A vérifiant $AM = MA$ pour toute matrice M.
3. Montrer que $T_{ij} = I_n + E_{ij}$ est inversible. En déduire que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet une base constituée de matrices inversibles.
4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ ayant même matrice dans toutes les bases de E. Identifier f.
5. Quel est le centre de $GL_n(\mathbb{K})$?

Exercice 28. *X MP 2014*. ●●◐ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est idempotente si $A^2 = A$.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ idempotente. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{rg}(A)$.

Correction

Si A est idempotente, alors c'est la matrice d'un projecteur, dont le rang égale la trace par le cours.

2. Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{R})$ de cardinal p. Soit $A = \displaystyle\sum_{M \in G} M$

   (a) Vérifier que $\dfrac{A}{p}$ est idempotente.

Correction

On calcule A^2. Déjà, soit $N \in G$. Alors

$$AN = \sum_{M \in G} MN = \sum_{M \in G} M = A,$$

car $M \mapsto MN$ est une bijection. Donc

$$A^2 = A \sum_{M \in G} M = \sum_{M \in G} AM = \sum_{M \in G} A = pA,$$

donc

$$\left(\frac{A}{p}\right)^2 = \frac{1}{p^2} A^2 = \frac{1}{p^2} pA = \frac{A}{p},$$

donc $\dfrac{A}{p}$ est idempotente.

(b) On suppose que $\mathrm{Tr}(A) = 0$. Montrer que $A = 0$.

Correction

Si $\mathrm{Tr}(A) = 0$, alors $\mathrm{Tr}(A/p) = 0$, donc $\mathrm{rg}(A/p) = 0$ donc $\mathrm{rg}(A) = 0$ donc $A = 0$.

(c) Montrer que $\mathrm{Tr}(A)$ est un entier divisible par p.

Correction

Comme $\frac{1}{p}\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{rg}(A)$, $\frac{1}{p}\mathrm{Tr}(A) \in \mathbb{N}$, donc $\mathrm{Tr}(A)$ est un entier divisieble par p.

3. Soit $F = \{x \in \mathbb{R}^n, \forall M \in G, Mx = x\}$.

(i) Montrer que F est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ de dimension égale à $\mathrm{Tr}(A)/p$.

Correction

Le fait que F est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ est trivial. Déterminons sa dimension. On peut espérer que $F = \mathrm{Im}\left(\frac{A}{p}\right) = \ker\left(\frac{A}{p} - \mathrm{I}_n\right)$.

Déjà, si $x \in F$, alors $\frac{1}{p}Ax = \frac{1}{p}\sum_{M\in G} Mx = \frac{1}{p}\sum_{M\in G} x = x$.

Ensuite, si $x \in \mathrm{Im}\left(\frac{A}{p}\right)$, alors on dispose de w dans $\mathbb{R}^n$, $x = \frac{1}{p}Aw$. Mais alors si $M \in G$,

$$Mx = M\frac{1}{p}Aw = \frac{1}{p}M\sum_{N\in G} Nw = \frac{1}{p}\sum_{N\in G} MNw = \frac{1}{p}\sum_{N'\in G} N'w = \frac{1}{p}Aw = x,$$

d'où l'inclusion réciproque et l'égalité !

(ii) Pour $p \in N^*$, expliciter un sous-groupe G de $GL_2(\mathbb{R})$ de cardinal p.

Correction

Soit $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Alors on montre immédiatement que $R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}$, donc si on pose G le sous-groupe engendré par $R_{\frac{2\pi}{p}}$, alors G est cyclique de cardinal p.

Indications.

1 **1.** Partir de x_0 tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$ et partir d'une relation de liaison entre $(x_0, \ldots, f^{n-1}(x_0))$, à laquelle on applique suffisamment de fois f.

2. Utiliser ou bien des produits matriciels, ou bien calculer $f^k(f^i(x_0))$.

3. Utiliser le fait que $(x_0, \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E. On peut , si $g \in \mathscr{L}(E)$ commute avec f, s'intéresser à déterminer la forme de la matrice de g dans cette base.

2 **1.** Remarquer qu'une matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente.

2. Montrer d'abord des inclusions, puis des égalités (utiliser le théorème du rang).

3. Utiliser que $\mathbb{C}_1[X] = \ker(\Delta^2)$.

4. Prendre $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

5. Utiliser $v : \left| \begin{array}{c} \mathbb{C}_1[X] \to \mathbb{C}_1[X] \\ x \mapsto v(x) \end{array} \right.$.

3 Utiliser le fait que A et B sont des matrices de symétries, donc sont semblables à des matrices bien connues !

4 **1.** Démontrer et utiliser le fait que g envoie $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ sur $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ et réciproquement.

2. Commencer par une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et regarder $g(e_1), \dots, g(e_n)$...

5 **1.** Utiliser le fait que M est équivalente à $J_{n,n,1}$, ou le fait que toutes les colonnes de M sont proportionnelles.

2. Utiliser l'équivalence à $J_{n,n,r}$.

3. Utiliser l'écriture matricielle !

4. Utiliser le fait qu'on doit avoir $f^2 = f$.

6 **1.** Le sens facile est le sens réciproque.

2. Commencer avec $A = J_{n,p,r}$ et $B = J_{n,p,s}$, et remarquer ce que fait $J_{n,p,s} \times J_{p,p,r}$.

7 **1.** Déterminer la matrice de l'application dans la base canonique ou dans une base adaptée à la décomposition $\mathscr{S}_n \oplus \mathscr{A}_n$.

2. Écrire la matrice de φ dans la base canonique, bien ordonnée, i.e. dans $(E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \dots E_{2n}, \dots)$

8 **1.** Injectivité + mêmes dimensions.

2. Commencer avec $A = J_r$, puis adapter.

9 Penser à utiliser la définition de l'écriture d'une matrice dans une base. Ensuite, pas nécessaire d'utiliser la matrice pour déterminer le noyau et l'image !

10 **1.** Ne pas oublier les deux parties du mot **endo-morphisme**.

2. Remarquer qu'il s'agit d'une famille de polynômes à degrés échelonnés.

3. On doit normalement trouver une famille diagonale.

4. Penser au fait qu'une matrice diagonale est inversible ssi ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

11 **1.** Démontrer que (f_1, f_2) est libre.

2. Vérifier que $\varphi(f_1)$ et $\varphi(f_2)$ sont toujours dans E.

3. Normalement les images de f_1 et f_2 par φ ont déjà été calculées.

4. Calculer A^2, A^3 et faire une récurrence immédiate.

5. Utiliser la représentation matricielle.

6. Toute la difficulté réside dans la détermination de la constante de primitivation ! Elle doit notamment aboutir à une application linéaire.

7. (i) Normalement les calculs ont déjà été faits !

(ii)

12 Partir de $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $f^2(x) \neq 0$ et montrer que la famille $(x, f(x), f^2(x))$ est une base de E.

13 Utiliser des bases adaptées ! Partir par exemple d'une base du noyau, que l'on complète en une base de E. Ou, si on a $F \subset G \subset E$, partir d'une base de F, complétée en une base de G, complétée en une base de E.

16 **1.** Essayer de ne faire aucun calcul et utiliser l'expression de f.

2. Résoudre un système homogène.

3. Résoudre un système inhomogène.

4. (i) Inverer la matrice de $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ dans la base canonique.

(ii) Si vous avez suivi les indications, c'est la matrice que vous venez d'inverser !

5. (i)
(ii) Utiliser la question précédente !

6. Elle a déjà été calculée à la question (i).

17 **1.** Utiliser le fait que deux matrices sont équivalentes **si et seulement si** elles ont même rang.

2. Montrer d'abord que $\varphi(A)$ est non nulle si A est inversible. Puis utiliser la question précédente.

18 **1.** C'est du cours !

2. Faire un simple calcul.

3. Démontrer qu'on a trouvé ainsi une famille libre, donc une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et traduire ceci à l'aide de l'isomorphismes entre les applications linéaires et les matrices d'applications linéaires.

19 **1.** Revoir le dernier exo du premier chapitre d'algèbre linéaire.

2. Faire une récurrence ! En utilisant x tel que $(x, f(x))$ est libre, compléter cette famille en une base, et écrire la matrice de f dans cette base complétée. Elle doit commencer par un 0 en haut à gauche.

21 **1.** Écrire $f \circ ($ une expression en $f) = \mathrm{Id}$.

2. Déclarer proprement ses variables.

3. Montrer que $f - \mathrm{Id}$ est de rang 1, compléter $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$ en une base de $\ker(f - \mathrm{Id})$.

4. Calculer A^2 puis faire une récurrence immédiate.

22 **1.** Élémentaire.

2. Idem.

3. Montrer que A est équivalente à une matrice nilpotente.

25 Raisonner par analyse-synthèse, prendre la trace et distinguer selon les valeurs de $\mathrm{Tr}(A)$.

26 **1.** Non !

2. Utiliser que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

3. Utiliser qu'une matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

27 **1.** On l'a déjà fait en classe !

2. On l'a déjà fait en TD !

3. Engendrer les E_{ij} avec les T_{ij}

4. Montrer que f est une homothétie.

5. Attention, toutes les homothéties ne sont pas inversibles.

28 **1.** C'est du cours !

2. (a) Utiliser que $M \mapsto NM$ est une bijection (encore !)
(b) Utiliser le fait que la trace d'un projecteur est son rang.
(c) Idem.

3. (i) Utiliser le fait que A est un projecteur.
(ii) S'intéresser aux matrices $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.