MPSI 1

Mathématiques
DS 09

Mercredi 13 mai – 13h-17h

- Durée : 4 heures.
  - Prenez **10 minutes** pour lire le sujet en entier et décider de la stratégie que vous adopterez.
  - Prenez **10 minutes** au moins à la fin des 4 heures pour vous relire !
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- Le sujet est composé de deux exercices (45 minutes – 1h) et d'un problème d'analyse/dénombrement/-probabilités. *Conseil : on remarquera que, pour la partie B, le résultat final est donné à la question 9. On peut donc la sauter à un moment pour passer aux probabilités...*
- **Consignes de présentation.**
  - Les pages doivent être **numérotées.**
  - Les résultats doivent être **mis en valeur** (encadrés ou soulignés).
  - Les questions doivent être **numérotées**. Une question non numérotée, c'est une question potentiellement non corrigée.
  - Les questions doivent être **faites dans l'ordre** : si vous admettez une question, laissez de la place à l'endroit où elle est censée être pour y revenir ensuite. Changez de copie ou de page quand vous changez de grande partie.
- À tout moment, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour pouvoir continuer : il suffit de le préciser clairement sur la copie.
- Si vous voyez ce qui semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur la copie.
- Laissez de la place dans une marge à gauche pour pouvoir noter plus facilement le devoir.
- Une réponse fausse, si elle ne laisse pas paraître de calculs intermédiaires, compte 0 points ; avec calculs intermédiaires elle peut rapporter quelques points.

♫ Bon courage ! ♫

Exercice 1. *Cours de matrices*.

1. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension 3, $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
On note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On note $\mathscr{B} = (e_3, e_2, e_1)$. Donner $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

2. Soit $\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X] \\ \quad P \mapsto (X^2-1)P'(X) - 3XP(X) \end{array}\right.$. Donner la matrice de φ dans la base canonique au départ et à l'arrivée.

3. On note, sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $A \equiv B$ si A et B sont équivalentes. Définir « $A \equiv B$ » et donner l'ensemble des classes d'équivalence pour $\equiv$.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle

$$x\left(x^2-1\right)y' + \left(4x^2-2\right)y = 1. \tag{E}$$

1. Sur quels intervalles peut-on, a priori, résoudre (E) ?

Correction

A priori, on peut résoudre E sur des intervalles sur lesquels $x \mapsto x(x^2-1)$ ne s'annule pas, i.e. $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$.

2. Résoudre (E) sur chacun des $]1, +\infty[$. On écrira l'ensemble des solutions sous la forme $f_0 + \mathrm{Vect}(f_1)$, où f_0 et f_1 sont deux fonctions dérivables sur $]1, +\infty[$. On vérifiera que f_0 et f_1 sont des fonctions rationnelles, et qu'elles sont définies sur tous les intervalles trouvés à la question précédente.
On admettra que sur les autres intervalles de résolution, les solutions ont même forme, i.e. que si y est solution de l'équation sur un intervalle, il existe λ **dépendant de l'intervalle** tel que $y = f_0 + \lambda f_1$.

Correction

On réécrit l'équation sous la forme

$$y' + \frac{4x^2-2}{x(x-1)(x+1)}y = \frac{1}{x(x-1)(x+1)}.$$

On veut primitiver $x \mapsto \dfrac{4x^2-2}{x(x-1)(x+1)}$. On sait, par le théorème de décomposition en éléments simples que

$$\frac{4X^2-2}{X(X-1)(X+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1}.$$

On calcule a, b et c : $a = \dfrac{-2}{-1} = 2$, $b = \dfrac{2}{1 \times 2} = 1$ et $c = \dfrac{2}{-1 \times (-2)} = 1$. Ainsi,

$$\frac{4X^2-2}{X(X-1)(X+1)} = \frac{2}{X} + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1}.$$

Or, une primitive de $x \mapsto \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$ sur $]1, +\infty[$ est $x \mapsto 2\ln(x) + \ln(x-1) + \ln(x+1)$.
Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\{x \mapsto \frac{\lambda}{x^2(x-1)(x+1)},\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Ensuite, on fait une méthode de variation de la constante pour déterminer une solution particulière de l'équation. On note $f_1(x) = \dfrac{1}{x^2(x-1)(x+1)}$. Soit y une fonction dérivable sur $]1, +\infty[$ et

$z : x \mapsto \dfrac{y(x)}{f_1(x)}$. Alors on a les équivalences

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de l'équation } &\Leftrightarrow \forall x > 1,\ y'(x) + \frac{4x^2-2}{x(x-1)(x+1)} y = \frac{1}{x(x-1)(x+1)} \\ &\Leftrightarrow \forall x > 1, z'(x) f_1(x) = \frac{1}{x(x-1)(x+1)} \\ &\Leftrightarrow \forall x > 1, z'(x) = x \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x > 1,\ z(x) = \frac{x^2}{2} + \lambda. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E) est donc

$$\boxed{\left\{ x \mapsto \left(\frac{x^2}{2} + \lambda\right) \frac{1}{x^2(x-1)(x+1)},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\} = f_0 + \mathrm{Vect}(f_1),}$$

où $f_0 : x \mapsto \dfrac{1}{2(x-1)(x+1)}$ et $f_1 : x \mapsto \dfrac{\lambda}{x^2(x-1)(x+1)}$.

3. Démontrer qu'il existe une unique solution de (E) définie sur $]-1,1[$.

Correction

Analyse. Soit f une telle solution. Alors il existe λ et μ des réels tels que

$$\forall x \in]-1,0[,\ f(x) = \frac{1}{2(x^2-1)} + \frac{\lambda}{x^2(x-1)(x+1)} \text{ et } \forall x \in]0,1[,\ f(x) = \frac{1}{2(x^2-1)} + \frac{\mu}{x^2(x-1)(x+1)}.$$

Or, f doit avoir une limite finie en 0, ce qui impose que $\lambda = \mu = 0$. Donc $f : x \mapsto \dfrac{1}{2(x^2-1)}$.

Synthèse évidente.

4. Existe-t-il des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}^*$? Sur $\mathbb{R}$?

Correction

Analyse. Soit f une telle solution. Alors il existe $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que

$$\forall x \in]-\infty,-1[,\ f(x) = \frac{1}{2(x^2-1)} + \frac{\alpha}{x^2(x-1)(x+1)},$$
$$\forall x \in]-1,0[,\ f(x) = \frac{1}{2(x^2-1)} + \frac{\beta}{x^2(x-1)(x+1)},$$
$$\forall x \in]0,1[,\ f(x) = \frac{1}{2(x^2-1)} + \frac{\gamma}{x^2(x-1)(x+1)}, \qquad \forall x \in]1,+\infty[,\ f(x) = \frac{1}{2(x^2-1)} + \frac{\delta}{x^2(x-1)(x+1)}.$$

Or, f doit être continue en 1, donc doit avoir une limite finie en 1^- et en 1^+. Mais pour $x \in]0,1[$,

$$\frac{1}{2(x^2-1)} + \frac{\gamma}{x^2(x-1)(x+1)} = \frac{2\gamma + x^2}{2x^2(x-1)(x+1)}.$$

Si $\gamma \neq -\dfrac{1}{2}$, alors $f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \dfrac{2\gamma+1}{4(x-1)} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$, impossible. Donc nécessairement, $\gamma = -\dfrac{1}{2}$, et, pour $x \in]0,1[$,

$$f(x) = \frac{x^2-1}{2x^2(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2x^2}.$$

La même analyse sur les 4 autres intervalles impose que pour tout x, $f(x) = \dfrac{1}{2ex^2}$.
Synthèse. Une telle fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et est bien solution de (E).
En revanche, si g est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, elle est solution de (E) sur $\mathbb{R}^*$, donc est de la forme précédente, qui n'est pas prolongeable par continuité en 0. Donc (E) n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

Lemme de Fekete et théorème de Erdös-Szekeres

Le but de ce problème est d'étudier quelques applications probabilistes du lemme de sous-additivité de Fekete et du théorème de Erdös-Szekeres.

Dans tout le problème, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ désigne un espace probabilisé. On note $P(A)$ la probabilité d'un événement A et on note $\mathrm{E}(X)$ l'espérance (si elle existe) d'une variable aléatoire réelle discrète X définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

A. Préliminaires

Les deux questions de cette partie sont indépendantes.

Soit n un entier naturel non nul.

1) Montrer que pour toute variable aléatoire X réelle à valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$ et pour tout $m \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\mathrm{E}(X) \leqslant m - 1 + n P(X \geqslant m).$$

2) À l'aide d'une comparaison entre une somme et une intégrale, montrer que

$$n \ln(n) - n + 1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k).$$

En déduire l'inégalité

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \leqslant n!$$

B. Le lemme de sous-additivité de Fekete

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $U_n = \{u_k\,;\, k \geqslant n\}$. On définit les suites $\underline{u} = (\underline{u}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\overline{u} = (\overline{u}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par les formules

$$\underline{u}_n = \inf(U_n) \quad \text{et} \quad \overline{u}_n = \sup(U_n).$$

3) Justifier que $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont bien définies. Montrer qu'elles sont monotones puis qu'elles convergent.

Pour toutes suites réelles $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on dit que v est *plus petite* que w, et on note $v \preceq w$, si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_n \leqslant w_n$. De façon équivalente, on dit aussi que w est *plus grande* que v.

4) Montrer que $\overline{u}$ est la plus petite suite (au sens de $\preceq$) qui est décroissante et plus grande que u. Montrer de même que $\underline{u}$ est la plus grande suite (au sens de $\preceq$) qui est croissante et plus petite que u.

Dans toute la suite du problème, on appelle limite inférieure $\underline{\lim}$ et limite supérieure $\overline{\lim}$ les limites suivantes :

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \underline{u}_n \quad \text{et} \quad \overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \overline{u}_n$$

5) Si $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une autre suite réelle bornée plus grande que u, comparer les limites de $\overline{u}$ et de $\overline{v}$.

6) Montrer que $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont adjacentes si et seulement si u converge. En ce cas, que peut-on dire des limites des trois suites u, $\overline{u}$ et $\underline{u}$?

On dit qu'une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est *sous-additive* si pour tous i, j dans $\mathbb{N}^*$, on a $u_{i+j} \leqslant u_i + u_j$.

Dans le reste de cette partie on ne suppose plus que la suite u est bornée, mais on suppose que u est positive *et* sous-additive.

7) Soit m et n deux entiers naturels non nuls tels que $m \geqslant 2n$. On note q le quotient et r le reste de la division euclidienne de m par n. Montrer que

$$u_m \leqslant (q-1)u_n + u_{n+r}$$

et en déduire l'inégalité

$$\frac{u_m}{m} \leqslant \frac{m-n-r}{m} \cdot \frac{u_n}{n} + \frac{\max\{u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{2n-1}\}}{m}.$$

8) En déduire que la suite $\left(\dfrac{u_m}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\overline{\lim}_{m\to+\infty} \frac{u_m}{m} \leqslant \frac{u_n}{n}.$$

9) En conclure que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

C. Une application probabiliste

Soit x un nombre réel et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes et de même loi. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note Y_n la variable aléatoire réelle définie par

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

10) Montrer que si $P(X_1 < x) = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_n < x) = 1$ et que si $P(X_1 \geqslant x) > 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_n \geqslant x) > 0$.

11) Soit m et n deux entiers naturels non nuls. Montrer l'inclusion d'événements suivante :

$$\left(\left\{Y_m \geqslant x\right\} \cap \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right\}\right) \subset \left\{Y_{m+n} \geqslant x\right\}$$

et en déduire l'inégalité

$$P(Y_{m+n} \geqslant x) \geqslant P(Y_m \geqslant x)P(Y_n \geqslant x).$$

12) Démontrer la convergence de la suite

$$\left(\left(P(Y_n \geqslant x)\right)^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

D. Le théorème de Erdös-Szekeres

Si r est un entier naturel non nul, on note $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_r)$ une liste de nombres réels de longueur r ; cette liste est *croissante* si $\ell_1 \leqslant \ell_2 \leqslant \cdots \leqslant \ell_r$, *décroissante* si $\ell_1 \geqslant \ell_2 \geqslant \cdots \geqslant \ell_r$. Une liste ℓ' de longueur $p \in \{1, \ldots, r\}$ est *extraite* de ℓ s'il existe p indices strictement croissants $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$ dans $\{1, \ldots, r\}$ tels que $\ell' = (\ell_{i_1}, \ldots, \ell_{i_p})$.

Soit p et q deux entiers naturels non nuls et $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{pq+1})$ une liste de longueur $pq+1$ de nombres réels deux-à-deux distincts qui représentent les valeurs de $pq+1$ jetons numérotés $1, 2, \ldots, pq+1$.

On range successivement les jetons en piles de gauche à droite par le procédé suivant :

- le jeton n°1 de valeur a_1 débute la première pile ;
- *si* $a_2 > a_1$, alors on pose le jeton n°2 de valeur a_2 sur le jeton n°1 ;
  sinon on crée une nouvelle pile avec ce jeton n°2, située à droite de la première pile ;
- lors des étapes suivantes, disposant du jeton n°k de valeur a_k, on le dépose sur la première pile en partant de la gauche telle que a_k est supérieur à la valeur du jeton au sommet de la pile, *si* une telle pile existe ;
  sinon on crée une nouvelle pile avec ce jeton, située à droite des précédentes.

En suivant ce procédé avec tous les jetons, on obtient plusieurs piles de jetons, chaque pile ayant des valeurs rangées dans l'ordre croissant du bas vers le haut.

Par exemple, avec la liste

$$a = (1, 4, 2, 3, 7, 6, 5, 9, 10, 8)$$

dans cet ordre, on obtient de gauche à droite les trois piles suivantes :

$$\begin{array}{ccc} 10 & & \\ 9 & 8 & \\ 7 & 6 & \\ 4 & 3 & \\ 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array}$$

13) À l'aide d'un raisonnement par récurrence sur le nombre s de piles, montrer qu'à l'issue du processus, pour tout jeton de valeur z de la dernière pile, il existe une liste $b = (b_1, \ldots, b_s)$ de réels extraite de la liste a vérifiant :

- b est décroissante et de longueur s ;
- pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$ le jeton n°i de valeur b_i est dans la i-ème pile en partant de la gauche ;
- $b_s = z$.

Par exemple, avec la liste $a = (1, 4, 2, 3, 7, 6, 5, 9, 10, 8)$ on a une liste extraite $b = (7, 6, 5)$.

14) En déduire que la liste a admet au moins une liste extraite croissante de longueur $p + 1$ *ou* une liste extraite décroissante de longueur $q + 1$.

E. Comportement asymptotique d'une suite aléatoire

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note S_n l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Chaque élément $\sigma \in S_n$ est noté par la liste de ses n images $(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$.

Soit B une variable aléatoire à valeurs dans S_n de loi uniforme, c'est-à-dire que pour tout $\sigma \in S_n$, on a $P(B = \sigma) = 1/\mathrm{Card}(S_n)$. On définit la variable aléatoire A à valeurs dans S_n en posant, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$A(\omega) = \big(B(\omega)(1), \ldots, B(\omega)(n)\big).$$

On note également, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $A_k(\omega) = B(\omega)(k)$. Enfin, on considère les variables aléatoires réelles C_n et D_n définies par :

- C_n est la longueur de la plus longue liste croissante extraite de A ;
- D_n est la longueur de la plus longue liste décroissante extraite de A.

15) Les variables aléatoires réelles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont-elles mutuellement indépendantes ?

16) Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$ et $s = (s_1, \ldots, s_k)$ une liste croissante de longueur k d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$. On note A^s l'événement : « la liste $(A_{s_1}, \ldots, A_{s_k})$ est croissante ». Montrer que $P(A^s) = \dfrac{1}{k!}$.

17) Démontrer que C_n et D_n ont la même loi. Démontrer alors, à l'aide du résultat de la question 14, que :

$$\mathrm{E}(C_n) \geqslant \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

18) Démontrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$P(C_n \geqslant k) \leqslant \frac{\binom{n}{k}}{k!}.$$

19) Soit n un entier naturel non nul et α un réel strictement supérieur à 1. Justifier qu'il existe un entier naturel non nul k tel que $k - 1 < \alpha e \sqrt{n} \leqslant k$. À l'aide du résultat de la question 2, déduire de la question précédente que

$$P(C_n \geqslant \alpha e \sqrt{n}) \leqslant \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e \sqrt{n}}.$$

20) En déduire qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tendant vers 0 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\mathrm{E}(C_n)}{\sqrt{n}} \leqslant \left(1 + n^{-1/4}\right) e + \varepsilon_n.$$

En conclure que $\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \dfrac{\mathrm{E}(C_n)}{\sqrt{n}}$ existe et que $\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \dfrac{\mathrm{E}(C_n)}{\sqrt{n}} \leqslant e$.

FIN DU PROBLÈME