

DM 20 facultatif

Pour la partie B, il y a besoin d'avoir lu la partie « matrices semblables » (et regardé la vidéo dont j'ai envoyé le lien par mail).

Matrices semblables à leur inverse, Petites Mines MPSI 2002

Dans tout le problème, E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3.

Pour u endomorphisme de E et n entier naturel non nul, on note $u^n = u \circ u \circ \dots \circ u$ (n fois).

On note $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3, $GL_3(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, et I_3 la matrice unité de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

On notera par 0 l'endomorphisme nul, la matrice nulle et le vecteur nul.

Pour deux matrices A et B de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, on dira que la matrice A est **semblable** à la matrice B s'il existe une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = P^{-1}BP$. On rappelle que si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases de E , si P est la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' , si u est un endomorphisme de E de matrice A dans la base \mathcal{B}' et de matrice B dans la base \mathcal{B} alors $A = P^{-1}BP$ (c'est-à-dire, la matrice A est semblable à la matrice B).

Partie A

1. On notera $A \sim B$ pour dire que la matrice A est semblable à la matrice B .

Démontrer que la relation \sim est une relation d'équivalence sur $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

On pourra désormais dire que les matrices A et B **sont** semblables.

Correction

C'est une question de cours.

2. Démontrer que deux matrices de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ de traces différents ne sont pas semblables.

Correction

Soient A et B deux matrices semblables de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. Alors on dispose de P inversible tel que $B = PAP^{-1}$. Donc $\text{Tr}(B) = \text{Tr}(PAP^{-1}) = \text{Tr}(P^{-1}PA) = \text{Tr}(A)$. Donc si A et B sont semblables, alors $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$. D'où la contraposée.

3. Soit u un endomorphisme de E et soit i et j deux entiers naturels.

On considère l'application w de $\ker u^{i+j}$ vers E définie par : $w(x) = u^j(x)$.

- (a) Montrer que $\text{Im} w \subset \ker u^i$.

Correction

Soit y dans $\text{Im}(w)$. Alors on dispose de x dans $\ker(u^{i+j})$ tel que $y = w(x) = u^j(x)$. Donc $u^i(y) = u^i(u^j(x)) = u^{i+j}(x) = 0$ car $x \in \ker(u^{i+j})$. D'où l'inclusion désirée.

- (b) En déduire que $\dim(\ker u^{i+j}) \leq \dim(\ker u^i) + \dim(\ker u^j)$.

Correction

On sait, d'après le théorème du rang, que

$$\dim(\ker(u^{i+j})) = \dim(\ker(w)) + \text{rg}(w).$$

Or, $\text{Im}(w) \subset \ker(u^i)$ donc $\text{rg}(w) \leq \dim(\ker(u^i))$. De plus, si $x \in \ker(w)$, alors $u^j(x) = 0$ donc $\ker(w) \subset \ker(u^j)$. Donc $\dim(\ker(w)) \leq \dim(\ker(u^j))$. Donc

$$\dim(\ker u^{i+j}) \leq \dim(\ker u^i) + \dim(\ker u^j).$$

4. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = 0$ et $\text{rg}u = 2$.

(a) Montrer que $\dim(\ker u^2) = 2$. (On pourra utiliser deux fois la question **3b**).

Correction

Comme $\text{rg}(u) = 2$, $\dim(\ker(u)) = 1$. Donc, puisque $u^3 = 0$, on obtient par la question précédente que

$$3 = \dim(\ker(u^3)) \leq \dim \ker(u^2) + \dim(\ker(u)) = \dim \ker(u^2) + 1, \text{ i.e. } 2 \leq \dim \ker(u^2)$$

$$\dim \ker(u^2) \leq \dim \ker(u) + \dim \ker(u) = 2,$$

donc $\dim \ker(u^2) = 2$.

(b) Montrer que l'on peut trouver un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0$, et en déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E .

Correction

On sait que $u^2 \neq 0$ car sinon on aurait $\ker(u^2) = E$, donc $\dim(\ker(u^2)) = 3$. Donc on dispose de a dans E tel que $u^2(a) \neq 0$. a n'est en particulier pas nul. On montre alors que $u^2(a), u(a), a$ est une base de E . Soient λ, μ et ν tels que

$$\lambda u^2(a) + \mu u(a) + \nu a = 0. \tag{1}$$

En composant une fois par u , et comme $u^3 = 0$, il vient

$$\mu u^2(a) + \nu u(a) = 0, \tag{2}$$

donc, en composant une nouvelle fois par u ,

$$\nu u^2(a) = 0, \tag{3}$$

donc, comme $u^2(a) \neq 0$, $\nu = 0$, donc, par (2), $\mu u^2(a) = 0$ donc $\mu = 0$, donc, par (1), $\lambda = 0$.

Donc $\lambda = \mu = \nu = 0$, donc $(u^2(a), u(a), a)$ est libre.

De cardinal $3 = \dim(E)$, cette famille est donc une base de E .

(c) Ecrire alors la matrice U de u et la matrice V de $u^2 - u$ dans cette base.

Correction

En posant $e_1 = u^2(a)$, $e_2 = u(a)$ et $e_3 = a$, on a $u(e_1) = 0$, $u(e_2) = e_1$ et $u(e_3) = e_2$, donc la matrice de u dans cette base est donc

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$V = U^2 - U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 = 0$ et $\text{rg}u = 1$.

(a) Montrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$.

Correction

Comme $\text{rg}(u) = 1$, $u \neq 0$, donc on dispose de b dans E tel que $u(b) \neq 0$. En particulier, $b \neq 0$.

(b) Justifier l'existence d'un vecteur c de $\ker u$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis montrer que la famille $(b, u(b), c)$ est une base de E .

Correction

Comme $\text{rg}(u) = 1$, $\ker(u)$ est de dimension 2. Or, si tous les vecteurs de $\ker(u)$ étaient colinéaires à $u(b)$, $\ker(u)$ serait une droite, absurde. Donc on dispose d'un vecteur c dans $\ker(u)$ qui ne soit pas colinéaire à $u(b)$, donc $(u(b), c)$ est libre.

On montre ensuite que $(b, u(b), c)$ est libre. Soient λ , μ et ν tels que

$$\lambda b + \mu u(b) + \nu c = 0. \tag{4}$$

En composant par u , et comme $u(c) = 0$, et $u^2 = 0$,

$$\lambda u(b) = 0. \tag{5}$$

Donc, comme $u(b) \neq 0$, $\lambda = 0$. Donc, par (4),

$$\mu u(b) + \nu c = 0,$$

donc, comme $(u(b), c)$ est libre, $\mu = \nu = 0$.

Donc $\lambda = \mu = \nu = 0$, donc

$(b, u(b), c)$ est une famille libre de cardinal $3 = \dim(E)$, donc est une base de E .

(c) Ecrire alors la matrice U' de u et la matrice V' de $u^2 - u$ dans cette base.

Correction

Si l'on pose $\varepsilon_1 = b$, $\varepsilon_2 = u(b)$ et $\varepsilon_3 = c$, alors

$$u(\varepsilon_1) = \varepsilon_2, \quad u(\varepsilon_2) = 0, \quad u(\varepsilon_3) = 0,$$

donc

$$U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V' = U'^2 - U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Partie B

Soit désormais une matrice A de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

On se propose de montrer que la matrice A est semblable à son inverse A^{-1} .

On pose alors $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et soit une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = T = I_3 + N$.

1. Expliquer pourquoi la matrice A est bien inversible.

Correction

La matrice A est semblable à une matrice triangulaire avec une diagonale non nulle. Cette matrice triangulaire est inversible, car de rang 3, donc A est elle-même inversible (car deux matrices semblables sont équivalentes donc de même rang).

2. Calculer N^3 et montrer que $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.

Correction

On remarque que $N^3 = 0$. Donc

$$(I_3 - N + N^2)(I_3 + N) = I_3 + N - N - N^2 + N^2 + N^3 = I_3 + 0 + 0 + 0 = I_3,$$

donc $I_3 + N$ est inversible d'inverse $I_3 - N + N^2$, donc $P^{-1}AP$ est inversible d'inverse $I_3 - N + N^2$, donc

$$PA^{-1}P^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = I_3 - N + N^2.$$

3. On suppose dans cette question que $N = 0$, montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Correction

Si $N = 0$, alors A est semblable à I_3 donc $A = I_3$ donc $A^{-1} = I_3 = A$. Égales, A et A^{-1} sont semblables.

4. On suppose dans cette question que $\text{rg}(N) = 2$. On pose $M = N^2 - N$.

- (a) Montrer que la matrice N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en déduire, en utilisant la question **A.4.**, une matrice semblable à la matrice M .

Correction

Par la partie A.4, si u est l'endomorphisme canoniquement associé à N , alors $u^3 = 0$ et $\text{rg}(u) = 2$ donc on dispose d'une base dans laquelle la matrice de u a pour forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc la matrice de u dans la base canonique, N , est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On en dé-

duit que $M = N^2 - N$ est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Calculer M^3 et déterminer $\text{rg}(M)$.

Correction

Si on pose $M' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on calcule $M'^3 = 0$. De plus, une base de $\text{Im}(M')$ est

$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc M' est de rang 2, donc M aussi.

(c) Montrer que les matrices M et N sont semblables.

Correction

$M^3 = 0$ et $\text{rg}(M) = 2$ donc si v est l'endomorphisme canoniquement associé à M , $v^3 = 0$ et $\text{rg}(v) = 2$ donc, d'après la partie A.4, on dispose d'une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice

de v est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc, comme M est la matrice de v dans la base canonique, M est

semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme N est aussi semblable à cette matrice et que la relation

de similitude est une relation d'équivalence, M et N sont semblables.

(d) Montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Correction

On sait que M et N sont semblables donc on dispose de Q inversible tel que $M = QNQ^{-1}$.
Donc

$$I + M = I + QNQ^{-1} = Q(I + N)Q^{-1},$$

donc

$$P^{-1}A^{-1}P = QP^{-1}APQ^{-1},$$

donc

$$A^{-1} = (PQP^{-1})A(PQP^{-1})^{-1},$$

donc A et A^{-1} sont semblables.

5. On suppose dans cette question que $\text{rg}(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$.
Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Correction

Si $\text{rg}(N) = 1$, par le même raisonnement que précédemment, en prenant u l'endomorphisme canoniquement associé à N , et en utilisant la question A.5, N est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc

$M = N^2 - N$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $M^2 = 0$ et $\text{rg}(M) = 1$, donc M est aussi

semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc M est semblable à N .

Le même raisonnement que précédemment permet de conclure : A et A^{-1} sont semblables.

6. **Exemple** : soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note (a, b, c) une base de E et u l'endomorphisme de E de matrice A dans cette base.

- (a) Montrer que $\ker(u - id_E)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 dont on donnera une base (e_1, e_2) .

Correction

Déterminons $\ker(u - \text{Id}_E)$. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur de E dans la base (a, b, c) .

Alors

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(u - \text{Id}_E) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - x = 0 \\ -z - y = 0 \\ y + 2z - z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \{y + z = 0\} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

Donc $\ker(u - \text{Id}_E) = \text{Vect}(a, b - c)$, donc

$\ker(u - \text{Id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2.

Une base de cet espace vectoriel est (e_1, e_2) avec $e_1 = a$ et $e_2 = b - c$.

(b) Justifier que la famille (e_1, e_2, c) est une base de E , et écrire la matrice de u dans cette base.

Correction

On sait que (a, b, c) est une base de E , donc $(a, b - c, c)$ est une base de E (combinaison entre vecteurs). Or, on a vu que $u(a) = a$, $u(e_2) = e_2$ et, en calculant, $u(c) = -b + 2c = -e_2 + c$, donc, dans la base (e_1, e_2, c) , la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Correction

A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc, par les questions précédentes,

A est semblable à son inverse!

7. Réciproquement, toute matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable à

une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Correction

Non ! La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est égale à son inverse, mais ne peut pas être semblable à une

matrice de la forme $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ car leurs traces sont différentes.