TD 25
Séries

Correction

Corrigé

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. Étudier la convergence des séries de termes généraux suivants ($a > 0$)

1. $\dfrac{3n+2n^2}{n^{5/3}+3n}$

2. $(n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}$

3. $\dfrac{\text{Arctan}(n)}{n}$

4. $\dfrac{\text{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}}$

5. $\dfrac{n!}{n^n}\mathrm{e}^n$

6. $\text{Arctan}(n+a) - \text{Arctan}(n)$.

Exercice 2. Déterminer la convergence des séries de termes généraux suivants

1. $\dfrac{(-1)^n n + 2n + 1}{n^4}$

Correction

Ici, pas besoin du critère des séries alternées ! Si n est dans $\mathbb{N}$,

$$\left|\frac{(-1)^n n + 2n + 1}{n^4}\right| \leqslant \frac{3n+1}{n^4} \sim \frac{3}{n^3},$$

donc $\dfrac{(-1)^n n + 2n + 1}{n^4} = O(1/n^3)$. Comme $\sum \dfrac{1}{n^3}$ converge (série de Riemann), on en déduit, par comparaison à une série à termes positifs, que $\sum \dfrac{(-1)^n n + 2n + 1}{n^4}$ converge.

2. $\dfrac{\cos(n^2\pi)}{n\ln(n)}$

Correction

Ici, c'est un pseudo-piège. Il suffit de penser que $\cos(n^2\pi) = (-1)^{n^2}$, égal à 1 si n est pair et -1 si n est impair. Donc $\dfrac{\cos(n^2\pi)}{n\ln(n)} = \dfrac{(-1)^n}{n\ln(n)}$. Comme la suite $\left(\dfrac{1}{n\ln(n)}\right)_{n\geqslant 2}$ est positive, décroissante et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, $\sum \dfrac{\cos(n^2\pi)}{n\ln(n)}$ converge par le critère des séries alternées.

3. $\dfrac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Correction

Posons pour tout n dans $\mathbb{N}$ $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$. Alors

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{(-1)^n}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + a_n, \end{aligned}$$

où $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{n}$, terme général d'une série de Riemann divergente, de signe constant. Comme $\sum a_n$ diverge et $\sum frac(-1)^n \sqrt{n}$ converge (critère des séries alternées), $\sum u_n$ diverge.

Exercice 3. ●◐○ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

1. Démontrer que si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.
2. Démontrer que si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge.
3. Trouver deux situations où $\ell = 1$, l'une où $\sum u_n$ converge, l'autre où $\sum u_n$ diverge.

Exercice 4. Démontrer la convergence et calculer les sommes des séries de terme général...

1. $\dfrac{n}{2^n}$
2. $\dfrac{n}{n^4 + n^2 + 1}$

Correction

Le deuxième terme $\dfrac{n}{n^4+n^2+1}$ est équivalent à $\dfrac{1}{n^3}$, donc est le terme général d'une série convergente. Pour calculer la somme, on remarque que

$$\begin{aligned} n^4+n^2+1 &= (n^2)^2+n^2+1 \\ &= (n^2-j)(n^2-j^2) \\ &= (n-e^{\frac{i\pi}{3}})(n+e^{\frac{i\pi}{3}})(n-e^{\frac{-i\pi}{3}})(n+e^{\frac{-i\pi}{3}}). \end{aligned}$$

On peut dès lors faire une décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$. Mais **ATTENTION**, si on fait ça, on se retrouvera à faire des $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha}{n-e^{i\frac{\pi}{3}}}$, qui ne converge pas !

On va plutôt regrouper nos facteurs pour factoriser le polynôme sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} n^4+n^2+1 &= (n-e^{\frac{i\pi}{3}})(n+e^{\frac{i\pi}{3}})(n-e^{\frac{-i\pi}{3}})(n+e^{\frac{-i\pi}{3}}) \\ &= (n^2-n+1)(n^2+n+1) \end{aligned}$$

Ainsi, on remarque assez facilement que

$$\frac{n}{n^4+n^2+1} = \frac{1}{2(n^2-n+1)} - \frac{1}{2(n^2+n+1)} = u_{n-1}-u_n,$$

où $u_n = \dfrac{1}{2(n^2+n+1)}$. Donc, comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_{k-1}-u_k = u_0-u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u_0 = \frac{1}{2}$. Donc la somme vaut $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 5. *Règle de Raabe-Duhamel*. ●●○ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tels qu'il existe $\alpha>1$ vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. Soit $1<\beta<\alpha$. Posons $v_n = n^{-\beta}$. À l'aide d'un d.l. à l'ordre 1, démontrer qu'à partir d'un certain rang $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

Correction

On écrit $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{(n+1)^{-\beta}}{n^{-\beta}} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1-\dfrac{\beta}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

On remarque que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1-\dfrac{\alpha}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)-\left(1-\dfrac{\beta}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \dfrac{\beta-\alpha}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{\beta-\alpha}{n}$, avec $\beta-\alpha<0$. Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ est négatif àpcr, donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ àpcr.

2. Conclure que la série de terme général (u_n) converge.

Correction

Soit N tel que pour tout $n\geqslant N$, on ait $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Alors par une récurrence immédiate, il vient, pour tout $n\geqslant N$,

$$\frac{u_n}{u_N} \leqslant \frac{v_n}{v_N},$$

donc $u_n = O(v_n)$, donc $\sum u_n$ converge.

 nlaillet.math@gmail.com

3. Trouver un contre-exemple dans le cas où $\alpha = 1$.

Correction

Si $\alpha = 1$, il suffit de prendre $u_n = \dfrac{1}{n-1}$. Alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{1}{n}$ mais $\sum u_n$ diverge.

Exercice 6. Soit (u_n) une suite de réels.

1. On suppose que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$ ont même nature.

Correction

On va procéder par double implication :

- si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n} \sim u_n$, donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum v_n$ converge.
- si $\sum v_n$ converge, on a, comme $v_n \neq 1$ (cela impliqueerait que $u_n = 1 + u_n$), $u_n = \dfrac{v_n}{1-v_n} \sim v_n$, donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

D'où l'équivalence.

2. On ne suppose plus que (u_n) est à termes positifs mais que $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ convergent. Montrer que $\sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$ converge.

Correction

Ici, on suppose que $\sum u_n$ converge, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $v_n \sim u_n$, **MAIS** u_n n'est pas nécessairement de signe constant ! Il faut donc aller plus loin dans le développement limité !

$$v_n - u_n = \frac{u_n}{1+u_n} - u_n = -\frac{u_n^2}{1+u_n} \sim -u_n^2,$$

série convergente **de terme général de signe constant !** Donc $v_n = u_n + w_n$ où $\sum u_n$ converge et $\sum w_n$ converge absolument, donc $\sum v_n$ converge.

2 Exercices pratiques

Exercice 7. *Termes généraux divers et variés.* ◐○○ –●●○ Dire si les séries suivantes sont convergentes ou pas

1. $\sum \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

2. $\sum \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$

3. $\sum \dfrac{n}{2^n + n}$

4. $\sum \dfrac{1}{(n^2+1)\sin(1/\sqrt{n})}$

5. $\sum \dfrac{n^3 \ln(2n)}{3^n}$

6. $\sum \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

7. $\sum \dfrac{n!^2}{(2n)!}$

8. $\sum \dfrac{1}{\ln(n)^n}$

9. $\sum \dfrac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}$

10. $\sum \mathrm{e} - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

 nlaillet.math@gmail.com

11. $\sum \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin(x)}{x} dx$

12. $\sum \cos \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha > 0)$

13. $\sum \cos^n \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha > 0)$

14. $\sum \sqrt{\tan \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}}$

15. $\sum \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{dt}{1+t^n}$

Correction

(i) On remarque que $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = e^{-\frac{\ln(n)}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ par croissances comparées. Donc $\frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \sim \frac{1}{n}$, terme général d'une série divergente, donc par comparaison des séries à termes positifs, la série considérée est divergente.

(ii) $n^2 e^{-\sqrt{n}} = (\sqrt{n})^4 e^{-\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Donc $e^{-\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc, par comparaison au terme général d'une série de Riemann convergente, $\sum e^{-\sqrt{n}}$ converge.

(iii) $\frac{n}{2^n+n} \sim \frac{n}{2^n}$. Or, $n^2 \frac{n}{2^n} = \frac{n^3}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Donc $\sum \frac{n}{2^n+n}$ converge.
Remarque : on aurait pu utiliser un critère de D'Alembert, mais de fait il n'était pas nécessaire.

(iv) $\frac{1}{(n^2+1)\sin(1/\sqrt{n})} \sim \frac{1}{n^2 \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{n^{3/2}}$, terme général d'une série de Riemann convergente.

(v) $n^2 \frac{n^3 \ln(2n)}{3^n} = \frac{n^5 \ln(2n)}{3^n} = o\left(\frac{n^6}{3^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Donc $\frac{n^3\ln(2n)}{3^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série $\sum \frac{n^3 \ln(2n)}{3^n}$ est à termes positifs, donc elle est convergente.

(vi) On détermine un équivalent du terme général $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

$$\begin{aligned} u_n &= e^{n^2 \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = e^{-n^2 \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} \\ &= e^{-n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\ &= e^{-n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\ &= e^{-n+\frac{1}{2}+o(1)} \sim \sqrt{e}e^{-n}, \end{aligned}$$

terme général d'une série convergente (géométrique). Donc, comme u_n est à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

(vii) Posons $v_n = \frac{n!^2}{(2n)!}$. Là, une règle de D'Alembert s'impose !

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)!^2}{(2(n+1))!} \frac{(2n)!}{n!^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \sim \frac{1}{4} < 1,$$

donc, d'après le critère de D'Alembert, $\sum v_n$ converge.

(viii) Posons $a_n = \frac{1}{\ln(n)^n}$. Pour $n \geqslant 3$, $\ln(n) \geqslant \ln(3)$ donc $a_n \leqslant \frac{1}{\ln(3)^n}$, terme général d'une série géométrique convergente. Donc $\sum a_n$ converge.

(ix) Posons $b_n = \frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}$. Alors $b_n = e^{-\ln(n)\ln(\ln(n))} = \frac{1}{n^{\ln(\ln(n))}}$. Or, pour $n \geqslant e^3$, $\ln(\ln(n)) \geqslant \ln(3) > 1$, donc $b_n \leqslant \frac{1}{n^{\ln(3)}}$, terme général d'une série de Riemann convergente. Donc $\sum b_n$ converge.

(x) Posons $c_n = \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \mathrm{e} - \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\\ &= \mathrm{e} - \mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}\\ &= \mathrm{e} - \mathrm{e}^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\\ &= \mathrm{e}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\right) \sim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}}{2n},\end{aligned}$$

terme général d'une série positive divergente, donc $\sum c_n$ diverge.

(xi) On sait que pour tout x dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \geqslant \frac{2}{\pi}x$. Donc $\frac{\sin(x)}{x} \geqslant \frac{2}{\pi}$, donc $\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin(x)}{x}dx \geqslant \frac{2}{\pi n}$, terme général d'une série divergente. Donc la série diverge.

(xii) Si $\alpha > 0$, $\cos\frac{1}{n^\alpha} \sim 1$, donc $\sum \cos\frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

(xiii) Si $\alpha > 0$,

$$\cos^n \frac{1}{n^\alpha} = e^{n\ln(\cos\frac{1}{n^\alpha})}.$$

Or,

$$n\ln\left(\cos\frac{1}{n^\alpha}\right) = n\ln\left(1-\frac{1}{2n^{2\alpha}} + O\frac{1}{2n^{3\alpha}}\right) = -n^{1-2\alpha} + O(n^{1-3\alpha}).$$

Ainsi, $\cos^n\frac{1}{n^\alpha} = \exp\left(-n^{1-2\alpha}+O(n^{1-3\alpha})\right)$. Donc, comme $\alpha > 0$, $\cos^n\frac{1}{n^\alpha} \underset{1}{\longrightarrow}$, donc la série diverge. En revanche elle convergerait si on avait $\alpha < 0$, et divergerait si $\alpha = 0$.

(xiv) Posons pour tout n dans $\mathbb{N}$ $d_n = \sqrt{\tan\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}}$. Alors

$$\tan\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + o\frac{1}{n^3} \sim \frac{1}{2n^3},$$

donc $d_n \sim \frac{1}{\sqrt{2}n^{\frac{3}{2}}}$, terme général d'une série de Riemann convergente. Donc $\sum d_n$ converge.

(xv) Si $t \leqslant \frac{1}{n}$, alors $t^n \leqslant \frac{1}{n^n}$, donc $\frac{1}{1+t^2} \geqslant \frac{1}{1+\frac{1}{n^{2n}}} = \frac{n^{2n}}{n^{2n}+1}$, donc $\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{dt}{1+t^n} \geqslant \frac{1}{n}\frac{n^{2n}}{n^{2n}+1} \sim \frac{1}{n}$, donc la série diverge.

Exercice 8. *Termes généraux originaux*. ●●◐ Déterminer la convergence des séries suivantes :

1. $\sum \frac{1}{nc(n)^\beta}$ où $c(n)$ est le nombre de chiffres en base 10 de n.

Correction

On sait que si n s'écrit avec $c(n)$ chiffres en base 10, alors $10^{c(n)-1} \leqslant n < 10^{c(n)}$, autrement dit $c(n)-1 \leqslant \log_{10}(n) < c(n)$, i.e. $c(n) \leqslant \log_{10}(n)+1 < c(n)+1$, donc $c(n) = \lfloor \log_{10}(n)+1 \rfloor$. On peut maintenant trouver un équivalent de $c(n)$ en encadrant la partie entière ! On sait que $x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$, donc, ici $\log_{10}(n) < c(n) \leqslant \log_{10}(n)+1 \sim_{n\to+\infty} \log_{10}(n)$, donc $c(n) \sim_{n\to+\infty} \log_{10}(n)$, donc $\frac{1}{nc(n)} \sim \frac{1}{n\log_{10}(n)} = \frac{\ln(10)}{n\ln(n)}$, terme général d'une série divergente par l'exercice vu en cours sur les séries de Bertrand.

2. $\sum \frac{1}{k_n}$ où k_n est le n-ième entier qui s'écrit sans 9.

Correction

Comptons le nombre d'entiers à k chiffres qui s'écrivent sans 9 : il y en a $8\times 9^{k-1}$, le 8 correspondant au choix de la première décimale, nécessairement non nulle, et le reste à des choix de chiffres parmi $[\![0,8]\!]$. Donc, si $n\in\mathbb{N}$, si k_n est le n-ième nombre sans 9 et $c(k_n)$ son nombre de chiffres, il y a au maximum $8\times 9^{c(k_n)-1}$ chifres qui s'écrivent sans 9 et qui ont le même nombre de chiffres que k_n. Donc, comme k_n s'écrit sans 9, c'est au plus le $8\times 9^{c(k_n)-1}$-ème chiffre s'écrivant sans 9, i.e. $n \leqslant 8\times 9^{c(k_n)-1} \leqslant 8\times 9^{\log_{10}(n)} = 8n^{\frac{\ln(10)}{\ln(9)}}$, i.e.

$$\frac{1}{k_n} \leqslant \frac{1}{8n^{\frac{\ln(10)}{\ln(9)}}},$$

avec $n^{\frac{\ln(10)}{\ln(9)}} > 1$, donc, par comparaison à une série de Riemann convergente, $\sum \frac{1}{k_n}$ converge.

3. $\sum \sin(2\pi n!\mathrm{e})$ *C'est + difficile que les deux autres...*

Exercice 9. ●◐○ Déterminer la convergence et calculer la somme de la série de terme général $u_n = \frac{n}{7^n}$.

Correction

La convergence est évidente car $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{7n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{7}$, terme général d'une série convergente par le critère de D'Alembert.
Pour le calcul de cette somme, deux methodes possibles.
Premiere méthode, par manipulation de sommes. Soit $N\in\mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} u_n &= \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{7^n}\\
&= \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{7^n} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=k}^{N}\frac{1}{7^n}\\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{7^k}\frac{1-\frac{1}{7^{N-k+1}}}{1-\frac{1}{7}} = \frac{7}{6}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{7^k} - \frac{7}{6}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{7^{N+1}}\\
&= \frac{7}{6}\frac{1}{7}\frac{1-\frac{1}{7^N}}{1-\frac{1}{7}} - \frac{7}{6}N\frac{1}{7^{N+1}}\\
&= \frac{7}{36}\left(1-\frac{1}{7^N}\right) - -\frac{7}{6}N\frac{1}{7^{N+1}}\\
&\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{7}{36}.
\end{aligned}$$

Deuxième méthode, par dérivation de fonction. Posons, pour tout x dans $]-1,1[$ et tout N dans $\mathbb{N}$,

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}.$$

Alors $f_N'(x) = \sum_{n=1}^{N} nx^{n-1}$ d'une part, mais on a aussi

$$\begin{aligned} f_N'(x) &= \frac{-(N+1)x^N(1-x) + 1 - x^{N+1}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-(N+1)x^N + (N+1)x^{N+1} + 1 - x^{N+1}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1-(N+1)x^N + Nx^{N+1}}{(1-x)^2} \\ &\xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Donc $\sum_{n=1}^{N} nx^n = xf_N(x) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{x}{(1-x)^2}$. Ici, $x = \frac{1}{7}$, donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{7^n} = \frac{\frac{1}{7}}{\left(1-\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{36}{49}} = \frac{7}{36}.$$

D'où le résultat !

Exercice 10. *Lien entre suites et séries.* ●○○ Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme

1. $w_n = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}$

2. $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$,

3. $v_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$,

Correction

Le but de cet exercice est de reconnaître des termes généraux de séries comme des différences de deux termes de suites, afin de reconnaître une somme télescopique.

(i) On remarque que

$$u_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = a_{n+1} - a_n,$$

où $a_n = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$. Alors si $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=2}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N} a_{n+1} - a_n = a_{N+1} - a_2 = \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) - \ln(2) \xrightarrow[N\to+\infty]{} -\ln(2).$$

(ii) On remarque que

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{2}\frac{1}{n(n+1)} = b_{n+1} - b_n,$$

où $b_n = -\frac{1}{2n(n+1)}$. Alors si $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} v_n = \sum_{n=0}^{N} b_{n+1} - b_n = b_{N+1} - b_0 = -\frac{1}{2(N+1)(N+2)} + \frac{1}{2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

(iii) Enfin, en posant $c_n = n^{\frac{1}{n}}$, on obtient, pour tout $N \geqslant 1$, $\sum_{n=1}^{N} w_n = c_{N+1} - 1$. Déterminons la convergence ou non de c_n. On remarque que $c_n = e^{\frac{\ln(n)}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1$. Donc $\sum w_n$ converge et $\sum_{n\geqslant 0} w_n = 0$.

Exercice 11. *Séries absolument convergentes et alternées*. ●◐○ –●●○

Discuter de la convergence des séries suivantes.

1. $\sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^2}$
2. $\sum \frac{(-1)^n}{n^2+\sin(n^2)}$
3. $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$
4. $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$
5. $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$
6. $\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n-1}}$
7. $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$
8. $\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$

Correction

(i) On remarque que $\left|\frac{(-1)^n \ln(n)}{n^2}\right| = \frac{\ln(n)}{n^2}$, et que $n^{3/2}\frac{\ln(n)}{n^2} = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\frac{\ln(n)}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, terme général d'une série de Riemann convergente. Donc $\sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^2}$ converge absolument, donc $\sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^2}$ converge.

(ii) De même, $\left|\frac{(-1)^n}{n^2+\sin(n^2)}\right| = \frac{1}{n^2+\sin(n^2)} \leqslant \frac{1}{n^2-1} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, terme général d'une série convergente, donc $\sum \frac{(-1)^n}{n^2+\sin(n^2)}$ converge absolument, donc converge.

(iii) Ici, on applique un critère des séries alternées : $\left(\frac{1}{\ln(n+2)}\right)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels positifs, décroissante, tendant vers 0, donc par le critère des séries alternées, $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$ est le terme général d'une série convergente.

(iv) **Si** $\alpha = \beta = 0$, $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = \sum (-1)^n$ ne converge pas (divergence grossière).

Si $\alpha, \beta \geqslant 0$, non tous deux nuls, $\left(\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}\right)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels positifs, décroissante, tendant vers 0, donc par le critère des séries alternées, $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge.

Si $\alpha > 0$ **et** $\beta < 0$, on écrit que $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Elle est décroissante : si l'on étudie la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta} = t^{-\alpha}\ln(t)^{-\beta}$, alors

$$f'(t) = -\alpha t^{-\alpha-1}\ln(t)^{-\beta} - \beta t^{-\alpha}\ln(t)^{-\beta-1}\frac{1}{t} = \frac{1}{t^{\alpha+1}\ln(t)^{\beta+1}}(-\alpha\ln(t)-\beta) < 0,$$

donc f est décroissante, donc $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ est une suite de réels positifs, décroissante et tendant

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

vers 0, donc, d'après le critère des séries alternées, $\sum (-1)^n \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge.

Si $\alpha < 0$, alors $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$ donc $\sum (-1)^n \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ diverge grossièrement.

(v) **ATTENTION : ON NE PEUT PAS FAIRE D'ÉQUIVALENT CAR LES SÉRIES NE SONT PAS À TERMES POSITIFS.** On peut en revanche faire un dl. On écrit

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{(-1)^n}{n} + v_n,$$

où $v_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge par le critère des séries alternées (je ne le rerédige pas ici), et $\sum v_n$ converge absolument par comparaison avec une série de Riemann. Donc $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge.

(vi) On écrit

$$\frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n-1}} = \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{(-1)^n}{n} + w_n,$$

où $w_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge par le critère des séries alternées (je ne le rerédige pas ici), et $\sum w_n$ converge absolument par comparaison avec une série de Riemann. Donc $\sum \frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n-1}}$ converge.

(vii) On écrit

$$\begin{aligned}
\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) &= \sin\left(\pi n \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}\right) \\
&= \sin\left(\pi n \left(1 + \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) \\
&= \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= (-1)^n \left(\frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= (-1)^n \frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),
\end{aligned}$$

somme du terme général d'une série convergente car alternée et d'une série absolument convergente par le critère de Riemann.

(viii) Posons pour tout n $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$. On remarque que sur l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$, sin est du signe de $(-1)^n$, donc u_n est du signe de $(-1)^n$. Ensuite, on montre que $|u_n|$ est décroissante et tend vers 0.

Limite. On remarque que $|u_n| \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{x} dx \leqslant \frac{1}{n\pi} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Décroissance. Si $n \in \mathbb{N}$, supposons n impair pour ne pas avoir de problème de signe, i.e. u_n est négatif et u_{n+1} positif, alors

$$\begin{aligned}|u_{n+1}| - |u_n| &= u_{n+1} + u_n \\ &= \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx + \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx.\end{aligned}$$

Dans la première intégrale, effectuons le changement de variables $y = x - \pi$. Alors quand $x = (n+1)\pi$, $y = n\pi$; quand $x = (n+2)\pi$, $y = (n+1)\pi$. $\dfrac{\sin(x)}{x} = \dfrac{\sin(y+\pi)}{y+\pi} = -\dfrac{\sin(y)}{y+\pi}$. Enfin, $dx = dy$. Donc

$$\int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx = -\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(y)}{y+\pi} dy,$$

donc

$$|u_{n+1}| - |u_n| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin(x) \left(-\frac{1}{x+\pi} + \frac{1}{x}\right) dx.$$

Or, n est impair, donc $\sin(x)$ est négatif sur $[n\pi, (n+1)\pi]$, et $\left(-\dfrac{1}{x+\pi} + \dfrac{1}{x}\right) \geqslant 0$, donc $|u_{n+1}| - |u_n| \leqslant 0$. On aurait la même inégalité si n était pair, donc $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Exercice 12. ●●○

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $(2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n \in \mathbb{N}$.

Correction

D'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}(2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}(-\sqrt{3})^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}\sqrt{3}^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}(-1)^k\sqrt{3}^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}\sqrt{3}^k \quad = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}((-1)^k+1)\sqrt{3}^k.\end{aligned}$$

Or, $(-1)^k + 1 = 0$ si k est impair et $(-1)^k + 1 = 2$ si k est pair, donc

$$\begin{aligned}(2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n &= \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} 2^{n-k} \times 2 \times \sqrt{3}^k \\ &= \sum_{0\leqslant 2p\leqslant n} \binom{n}{2p} 2^{n+1-2p}\sqrt{3}^{2p} \\ &= \sum_{0\leqslant 2p\leqslant n} \binom{n}{2p} 2^{n+1-2p}3^p \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

car tous les coefficients binomiaux sont dans $\mathbb{N}$. D'où le premier résultat.

2. En déduire la nature de la série de terme général $\sin\left((2+\sqrt{3})^n\pi\right)$.

Correction

Posons pour tout n dans $\mathbb{N}$, $k_n = (2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n$. Alors pour tout n dans $\mathbb{N}$, $(2+\sqrt{3})^n = k_n - (2-\sqrt{3})^n$. Donc

$$\begin{aligned}\sin\left((2+\sqrt{3})^n\pi\right) &= \sin\left(k_n\pi - (2-\sqrt{3})^n\pi\right) \\ &= (-1)^{k_n}\sin\left(-(2-\sqrt{3})^n\pi\right) \\ &= (-1)^{k_n+1}\sin\left((2-\sqrt{3})^n\pi\right),\end{aligned}$$

donc $\left|\sin\left((2+\sqrt{3})^n\pi\right)\right| = \left|\sin\left((2-\sqrt{3})^n\pi\right)\right|$. Or, $|2-\sqrt{3}| < 1$ donc $(2-\sqrt{3})^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc

$$\left|\sin\left((2+\sqrt{3})^n\pi\right)\right| \sim (2-\sqrt{3})^n,$$

terme général d'une série géométrique positive convergente, $\sum \sin\left((2+\sqrt{3})^n\pi\right)$ converge absolument, donc $\sum \sin\left((2+\sqrt{3})^n\pi\right)$ converge.

Exercice 13. *Équivalents de restes*. ●●○

1. En utilisant une comparaison série-intégrale, montrer que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \sim \ln(\ln(n))$.

Correction

Comme on veut un équivalent de la série, on va essayer d'encadrer le terme général de la série entre deux intégrales (et pas l'intégrale entre deux termes généraux de séries, comme ce qui a été fait en cours). Comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)}$, on sait que pour tout $k \geqslant 3$,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln(t)} \leqslant \frac{1}{k\ln(k)} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t\ln(t)}dt,$$

i.e.

$$\ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leqslant \frac{1}{k\ln(k)} \leqslant \ln(\ln(k)) - \ln(\ln(k-1)),$$

i.e., en sommant de $k=3$ à n, et par télescopage,

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)) \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \leqslant \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)),$$

donc

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)) + \frac{1}{2\ln(2)} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \leqslant \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}.$$

Or, $\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)) + \frac{1}{2\ln(2)} \sim \ln(\ln(n))$ et $\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)} \sim \ln(\ln(n))$, donc, par encadrement, $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \sim \ln(\ln(n))$.

2. Déterminer un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Correction

On fait de même ! Si $k \geqslant 2$,

$$\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k}^{k+1} \frac{dt}{t^2},$$

donc

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

donc pour tous $2 \leqslant n \leqslant N$, en sommant de n à N et par télescopage,

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{N} \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{N+1},$$

donc, en faisant tendre N vers $+\infty$,

$$\frac{1}{n-1} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n},$$

et, comme $\frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{n}$, on en déduit que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Exercice 14. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ sur $[-1,1]$. Quelle est la nature de la série de terme général

$$n\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(-\frac{1}{n}\right)\right)-2f'(0)?$$

Correction

Effectuons un développement limité :

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=f(0)+\frac{1}{n}f'(0)+\frac{1}{2n^2}f''(0)+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
$$f\left(-\frac{1}{n}\right)=f(0)-\frac{1}{n}f'(0)+\frac{1}{2n^2}f''(0)+O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

(on pourrait vraiment développer à l'ordre 3 mais ce qui nous importe, c'est la puissance de n que l'on peut obtenir)
Donc

$$f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{n}f'(0)+O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

d'où

$$n\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(-\frac{1}{n}\right)\right)-2f'(0)=O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

donc, par comparaison à une série absolument convergente, la série est absolument convergente, donc convergente.
Remarque : si f n'était pas $\mathscr{C}^3$, les choses ne seraient pas du tout si évidente. Il suffit de prendre $f(x)=x^3\sin(1/x)$ qui est $\mathscr{C}^2$ mais n'admet pas de dl à l'ordre 3.

3 Études plus théoriques

Exercice 15. ●○○ Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs. Montrer que si la série de terme général $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, alors la série de terme général (u_n) converge.

Correction

Il suffit de remarquer que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$u_n=u_0\times\prod_{k=1}^{n}\frac{u_k}{u_{k-1}}\leqslant u_0\times\prod_{k=1}^{n}\frac{v_k}{v_{k-1}}=\frac{u_0}{v_0}v_n,$$

donc $u_n=O(v_n)$ et, comme les deux séries sont à termes posiifs et que $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge.

Exercice 16. ●●◐ Soit (u_n) une suite décroissante de réels positifs telle que $\sum u_n$ converge. Étudier la série de terme général $n(u_{n-1}-u_n)$ et en déduire que $u_n=o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Correction

Soit N dans $\mathbb{N}$. On calcule

$$\sum_{n=1}^{N}n(u_{n-1}-u_n)=u_0-u_1+2u_1-2u_2+\cdots+Nu_{N-1}-Nu_n=\sum_{k=0}^{N-1}u_k-Nu_N\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}u_k,$$

car $u_k \geqslant 0$ et $\sum u_k$ converge. Or, u_k est décroissante, donc pour tout entier naturel n, $n(u_{n-1}-u_n) \geqslant 0$, donc $\sum n(u_{n-1}-u_n)$ est une série à termes positifs et bornée, donc c'est une série convergente. Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n(u_{n-1}-u_n)$ converge. Donc

$$Nu_N = \sum_{k=0}^{N-1} u_k - \sum_{n=1}^{N} n(u_{n-1}-u_n) \text{ converge vers une limite } \ell.$$

Or, si $\ell \neq 0$, $Nu_N \sim \ell$, i.e. $u_N \sim \dfrac{\ell}{N}$, terme général d'une série divergente : absurde ! Donc $\ell = 0$, donc $u_N = o\left(\dfrac{1}{N}\right)$.

Exercice 17. ●●○

1. Soient u_n et v_n deux suites à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$ et $\sum u_n$ diverge.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n}{\sim} +\infty \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Correction

On écrit que $u_n = v_n + \varepsilon_n v_n$ avec $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} v_k + \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k v_k.$$

Il s'agit donc de montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k v_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$. Soit alors $\varepsilon > 0$.

Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant N_1$, $\varepsilon_k \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ensuite, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Soit alors N_2 tel que pour tout $n \geqslant N_2$,

$$\underbrace{\frac{2}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{N_1} \varepsilon_k v_k}_{\text{constante indte de } n} \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k,$$

i.e.

$$\sum_{k=0}^{N_1} \varepsilon_k v_k \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} v_k,$$

Alors pour tout $n \geqslant \max(N_1, N_2)$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k v_k &= \sum_{k=0}^{N_1} \varepsilon_k v_k + \sum_{k=N_1+1}^{n} \varepsilon_k v_k \\ &\leqslant \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} v_k}_{\text{car } n\geqslant N_2} + \underbrace{\sum_{k=N_1+1}^{n} \frac{\varepsilon}{2} v_k}_{\text{car } k\geqslant N_1} \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} v_k + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=N_1+1}^{n} v_k \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} v_k + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} v_k \text{ car } \forall k \in \mathbb{N},\ v_k \geqslant 0 \\ &\leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} v_k,\end{aligned}$$

d'où le résultat !

2. Soient u_n et v_n deux suites à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$ et $\sum u_n$ converge.
Montrer que $\displaystyle\sum_{k\geqslant n} u_k \underset{n}{\sim} +\infty \sum_{k\geqslant n} v_k$.

Correction

On va faire un peu de même, mais en plus simple. On écrit que $u_n = v_n + \varepsilon_n v_n$ avec $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n}^{+\infty} v_k + \sum_{k=n}^{+\infty} \varepsilon_k v_k.$$

Il s'agit donc de montrer que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \varepsilon_k v_k = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right)$. Soit $\varepsilon > 0$, N tel que $\forall k \geqslant N$, $0 \leqslant \varepsilon_k \leqslant \varepsilon$.
Alors pour $n \geqslant N$,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \varepsilon_k v_k \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \varepsilon v_k = \varepsilon\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right),$$

d'où le résultat !

3. Retrouver le lemme de Cesàro.

4. *Une application.* On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 > 0$ et, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$.

(a) Démontrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

(b) Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $a_{n+1}^{\alpha} - a_n^{\alpha}$ converge vers une limite finie.

(c) En déduire un équivalent, quand n tend vers $+\infty$, de a_n.

Exercice 18. *Une étude fine de la série harmonique.* ●●◐

1. Montrer que $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ tend vers une constante. On appellera cette constante constante d'Euler et on la notera γ.

Correction

On a de plus $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln(k) + \ln(k-1) \right)$. Or, $\frac{1}{n} - \ln(n) - \ln(n-1) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, terme général d'une série convergente. D'où la convergence de u_n.

2. À l'aide de la série de terme général $(u_{n+1} - u_n)$ et d'une comparaison série/intégrale, montrer que $u_n - \gamma \sim \frac{1}{2n}$.

Correction

On écrit $v_{n-1} = u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Étudier $u_n - \gamma$ revient à étudier $\sum_{k=n}^{+\infty} v_k = -(u_{n-1} - \gamma)$. Or,

$$v_k = \frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \sim -\frac{1}{2k^2}$$

, donc $\sum_{k=n}^{+\infty} v_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} -\frac{1}{2k^2}$.

On en déduit que $\sum_{k=n}^{+\infty} v_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} -\frac{1}{2k^2} \sim -\frac{1}{2n}$, donc $u_n - \gamma \sim \frac{1}{2n}$.

3. Montrer enfin que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Correction

Ensuite, on définit $w_n = v_n - \frac{1}{2n}$, et on étudie $\sum_{k \geqslant n} w_{k+1} - w_k \sim -w_n$. Or,

$$\begin{aligned}
w_k - w_{k-1} &= v_k - v_{k-1} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k-2} \\
&= \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{k} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k-2} \\
&= -\frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k}\frac{1}{1-\frac{1}{k}} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \\
&= -\frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k}\left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}\right) + o\left(\frac{1}{k^3}\right) \\
&= -\frac{1}{3k^3} + \frac{1}{2k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right) \sim \frac{1}{6k^3},
\end{aligned}$$

donc $\sum w_k - w_{k-1}$ converge et le reste est équivalent à $\frac{1}{2}\frac{1}{6k^2}$, donc $-w_n \sim \frac{1}{12n^2}$, d'où le développement désiré !

 nlaillet.math@gmail.com

Exercice 19. *Développement décimal d'un réel*. Soit $x \in \mathbb{R}$. Une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée développement décimal de x si $c_0 \in \mathbb{Z}$, si pour tout $k \geqslant 1$, $c_k \in [\![0,9]\!]$, et $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{c_k}{10^k}$.

On définit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.
On définit la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $d_0 = a_0$ et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $d_n = 10^n(a_n - a_{n-1})$.

1. Vérifier que si $c_0 \in \mathbb{Z}$, si pour tout $k \geqslant 1$, $c_k \in [\![0,9]\!]$, la série de terme général $\frac{c_k}{10^k}$ converge.
2. Démontrer que $d_n \in [\![0,9]\!]$ et $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k}$.

Un développement décimal $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de x est dit **propre** si la suite n'est pas constante à partir d'un certain rang.

3. Démontrer que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie ci-dessus est un développement décimal propre de x.
4. Démontrer qu'il y a unicité du développement décimal propre d'un réel.

Exercice 20. *Rationnels et développement décimal*. ●●●
Le but de cet exercice est de montrer qu'un réel x est rationnel si et seulement si son développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang. Afin de simplifier les choses, supposons, sans perte de généralité, $x \in]0,1[$. Posons (d_n) le développement décimal propre de x.

1. Si $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang...
   (i) Traduire l'énoncé « $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période p à partir d'un certain rang »

Correction

$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall k \geqslant N,\ d_{k+p} = d_k$. Réécrivons de manière beucoup plus astucieuse cet énoncé. On a $d_N = d_{N+p} = d_{N+2p} = \dots$, $d_{N+1} = d_{N+1+p} = \dots$, etc. Cela signifie qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, $b_0, \dots, b_{p-1}$ p entiers de $[\![0,9]\!]$ tels que

$$\forall k \in [\![0, p-1]\!],\ \forall i \in \mathbb{N},\ d_{N+k+ip} = b_k.$$

   (ii) Écrire en séparant et en regroupant convenablement les termes de la série du développement décimal de x le nombre x sous la forme

$$x = a + \frac{10^p}{10^N(10^p - 1)} b,$$

où a et b sont des rationnels et N un entier défini dans la question précédente.

Correction

On suppose x périodique de période p. On a $x = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{d_n}{10^n} + \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$. Or,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n} &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{d_{N+k}}{10^{N+k}} + \sum_{k=p}^{2p-1} \frac{d_{N+k}}{10^{N+k}} + \dots = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{d_{N+k+ip}}{10^{N+k+ip}} \\
&= \frac{1}{10^N} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{10^{ip}} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{b_k}{10^k} = \frac{1}{10^N} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{b_k}{10^k} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{10^{ip}} \\
&= \frac{1}{10^N} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{b_k}{10^k} \frac{1}{1 - \frac{1}{10^p}} = \frac{1}{10^N} \frac{10^p}{10^p - 1} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{b_k}{10^k}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat, avec $a = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{d_n}{10^n}$ et $b = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{b_k}{10^k}$.

2. Si x est rationnel, écrivons $x = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$. On définit alors les suites (q_k) et (r_k) comme le quotient et le reste de la division euclidienne de $10^k a$ par b.

(i) Montrer qu'il existe deux entiers m et n tels que b divise $10^m a - 10^n a$.

Correction

(Question pas évidente) La suite des restes r_k est une suite infinie de nombres compris entre 0 et $b-1$, donc deux nécessairement sont égaux, disons m et n. Alors $10^m a = bq_m + r_m$ et $10^n a = bq_n + r_n$ avec $r_n = r_m$. Alors $10^m a - 10^n a = b(q_m - q_n)$, d'où le résultat !

(ii) En déduire que $\frac{10^m a}{b}$ et $\frac{10^n a}{b}$ ont les mêmes décimales après la virgule.

Correction

On écrit $\frac{10^m a}{b} = q_m + \frac{r_m}{b}$ et $\frac{10^n a}{b} = q_n + \frac{r_n}{b}$, donc les décimales après la virgule de $10^m a$ et $10^n b$ sont données par $\frac{r_m}{b} = \frac{r_n}{b}$.

(iii) En explicitant les développements décimaux de $\frac{10^m a}{b}$ et $\frac{10^n a}{b}$, en déduire que (d_n) est périodique à partir d'un certain rang.

Correction

Nommons (d_k) la suite des décimales après la virgule de $10^m a$ et (δ_k) celle de $10^n a$. Alors $d_k = \delta_k$ par la question précédente, mais, en supposant $m < n$, on a $10^n a = 10^{n-m} 10^m a$, donc $d_{k+n-m} = \delta_k$, et ce pour tout k, d'où la périodicité de (d_k) à partir d'un certain rang.

Exercice 21. ●●● On s'intéresse à des séries « extrêmes » avec un terme général décroissant très vite ou très lentement.

1. On prend $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n}$. Déterminer la nature de la stg $\frac{n!}{u_n}$.

Correction

On a de la convergence de manière à peu près évidente. On va par exemple montrer que si $n \geqslant 2$, (et c'est large) que $u_n \geqslant \frac{1}{2}(n-1)!^2$. L'initialisation $(n = 2)$ est évidente car $\mathrm{e}^{u_0} \geqslant 0$ donc $u_1 \geqslant 0$ donc $u_2 \geqslant 1 = (2-1)!^2$. Ensuite, si $u_n \geqslant (n-1)!^2$,

$$u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n} \geqslant 1 + u_n + \frac{u_n^2}{2!} + \frac{u_n^3}{6} \geqslant \frac{(n-1)!^3}{48} \geqslant (n-1)!^2,$$

dès lors que $(n-1) \geqslant 5$, i.e. $n \geqslant 6$. Il faut donc vérifier pour les 5 premiers termes, et ça marche bien !

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f(n) = n \times \ln(n) \times ln(ln(n)) \times \cdots \times ln^{(k_n)}(n)$ où $ln^{(k)}$ est le logarithme itéré k fois et où k_n est le plus grand entier naturel k tel que $ln^{(k)}(n) \geqslant 1$. Étudier la nature de la série de terme général $\frac{1}{f(n)}$.

 nlaillet.math@gmail.com

Correction

(Corrigé très succint !) Notons (e_n) la suite u_n avec $u_0 = 1$.
Notons $f_i : [e_i, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto t\ln(t)\ldots ln^{(i)}(t)$.
La série en question a pour terme général $\dfrac{1}{f(n)}$ où $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}[$ est la fonction dont la restriction à $[e_i, e_{i+1}]$ est f_i pour tout entier naturel i. Chaque f_i est continue et croissante et $f_{i-1}(ei) = f_i(ei) = a_i$, où $a_i = e_0e_1e_2\ldots e_i$, ce pour tout $i \geqslant 1$. Il en résulte que f est continue et croissante. La série $\sum \dfrac{1}{f(n)}$ et l'intégrale de $\dfrac{1}{f}$ ont même nature. Posons $E_i = \displaystyle\int_{e_i}^{e_{i+1}} \dfrac{1}{f_i(t)}dt$. On sit que $f_i(\mathrm{e}^u) = \mathrm{e}^u f_{i-1}(\mathrm{e}^u)$ donc fait le changement de variables $t = \mathrm{e}^u$ et donc on trouve $E_i = 1$ pour tout i. DOnc l'intégrale de $\dfrac{1}{f}$ diverge, donc la série aussi.

Exercice 22. ●●● Pour n dans $\mathbb{N}$, on pose $u_n = \mathrm{Arctan}(n+1) - \mathrm{Arctan}(n)$.

1. Montrer que pour tout $(\varepsilon_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\sum \varepsilon_n u_n$ converge et que sa somme est dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. Soit $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On définit (ε_n) par

- si $x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$, $\varepsilon_0 = 0$, sinon $\varepsilon_0 = 1$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, si $x \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k u_k + u_{n+1}$, $\varepsilon_{n+1} = 0$, sinon $\varepsilon_{n+1} = 1$.

Démontrer que $\sum \varepsilon_n u_n$ a pour somme x.

3. De manière générale, si (u_n) est décroissante positive, si $\sum u_k$ converge et sa somme égale S, à quelle condition sur la suite tout réel x de $[0, S]$ s'écrit-il sous la forme $x = \sum \varepsilon_n u_n$?

Correction

Je n'ai pas le temps de taper le corrigé pour le moment, mais ne pas hésiter à me demander des détails !

Stratégie Il faut absolument faire des exercices pratiques : exercices 7 (jusqu'au (j)) et 9, puis 11 (jusqu'au (e)). Faire aussi 13-1 pour faire une comparaison série-intégrale.
Ensuite, faire quelques exercices théoriques, parmi lesquels : 15, 5 et 17.

Indications

7 **D'abord** se demander si on ne peut pas simplifier le terme avec un équivalent. Puis, si on a réussi à simplifier, comparer à une série géométrique ou à une série de Riemann. Sinon, des inégalités peuvent fonctionner.

8 **1.** Si n s'écrit avec $c(n)$ chiffres en base 10, comment l'encadrer ? Trouver ainsi un équivalent de $c(n)$.

2. Compter le nombre d'entiers à k chiffres qui s'écrivent sans 9. Puis, si $n \in \mathbb{N}$, si k_n est le n-ième nombre sans 9 et $c(k_n)$ son nombre de chiffres, majoter n en fonction de $c(k_n)$.

3. Utiliser le fait que $\mathrm{e} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} + R_n$, et exprimer $\sin(2\pi n!\mathrm{e})$ à l'aide de R_n seulement.

9 La convergence est évidente. Pour la somme, commencer par calculer une somme partielle ! (cf. TD 2)

10 Se ramener à une étude de $\sum u_{n+1} - u_n$ et déterminer la convergence de (u_n).

11 Utiliser ou bien la convergence absolue, ou bien le critère des séries alternées. **Attention !** Si on est équivalent à un tg de série alternée qui converge, **cela ne signifie pas** que la série de départ converge ! Faire un dl dans ce cas.

12 **1.** Utiliser le binôme de Newton.

2. Exprimer $\sin\left((2+\sqrt{3})^n\pi\right)$ à l'aide de $\sin\left((2-\sqrt{3})^n\pi\right)$ et remarquer que $|2-\sqrt{3}|<1$.

13 Utiliser les mêmes méthodes qu'en **??** ! (comparaison série-intégrale).

14 Utiliser un développement limité donné par la formule de Taylor-Young.

15 Que vaut $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\frac{u_{k+1}}{u_k}$?

16 Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n(u_{n-1}-u_n) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, en déduire que $\sum n(u_{n-1}-u_n)$ converge, puis montrer que nu_n converge vers une limite, puis montrer que cette limite est nulle.

17 Revenir à la définition de $\sim$: $u_n \sim v_n$ ssi $\exists(\varepsilon_n)$ tendant vers 0 telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$ àpcr. Puis faire soigneusement chaque majoration.

5 **1.** Démontrer que $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \dfrac{\beta}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

2. Faire un équivalent de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, qui sera négatif à partir d'un certain rang.

3. Démontrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir d'un certain rang, et utiliser l'exercice 15.

4. Penser à une série de Riemann divergente.

18 **1.** Utiliser le fait que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n) = 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k} - \ln(k) + \ln(k-1)\right)$.

2. Tout est dans la question !

3. Définir $w_n = v_n - \dfrac{1}{2n}$, et étudier $\sum w_{k+1} - w_k$, pour montrer que le reste converge et est équivalent à $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{6k^2}$.

20 L'énoncé me paraît suffisamment détaillé !

21 **1.** Regarder u_1, u_2 et montrer qu'on a très rapidement $u_n \geqslant n^n$.

2. Poser $f_i : [u_i, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto t\ln(t)\dots ln^{(i)}(t)$. La série en question a pour terme général $\dfrac{1}{f(n)}$ où $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}[$ est la fonction dont la restriction à $[u_i, u_{i+1}]$ est f_i. Faire alors une comparaison série-intégrale.