

TD 25 Séries

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. Étudier la convergence des séries de termes généraux suivants ($a > 0$)

- | | |
|---|--|
| <p>1. $\frac{3n + 2n^2}{n^{5/3} + 3n}$</p> <p>3. $\frac{\text{Arctan}(n)}{n}$</p> <p>5. $\frac{n!}{n^n} e^n$</p> | <p>2. $(n + 1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}$</p> <p>4. $\frac{\text{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}}$</p> <p>6. $\text{Arctan}(n + a) - \text{Arctan}(n)$.</p> |
|---|--|

Exercice 2. Déterminer la convergence des séries de termes généraux suivants

1. $\frac{(-1)^n n + 2n + 1}{n^4}$
2. $\frac{\cos(n^2 \pi)}{n \ln(n)}$
3. $\frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$

Exercice 3. ●●○ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

1. Démontrer que si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.
2. Démontrer que si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge.
3. Trouver deux situations où $\ell = 1$, l'une où $\sum u_n$ converge, l'autre où $\sum u_n$ diverge.

Exercice 4. Démontrer la convergence et calculer les sommes des séries de terme général...

- | | |
|--------------------------------------|--|
| <p>1. $\frac{n}{2^n}$</p> | <p>2. $\frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$</p> |
|--------------------------------------|--|

Exercice 5. Règle de Raabe-Duhamel. ●●○ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tels qu'il existe $\alpha > 1$ vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. Soit $1 < \beta < \alpha$. Posons $v_n = n^{-\beta}$. À l'aide d'un d.l. à l'ordre 1, démontrer qu'à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.
2. Conclure que la série de terme général (u_n) converge.
3. Trouver un contre-exemple dans le cas où $\alpha = 1$.

Exercice 6. Soit (u_n) une suite de réels.

1. On suppose que pour tout n dans \mathbb{N} , $u_n \geq 0$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum \frac{u_n}{1 + u_n}$ ont même nature.
2. On ne suppose plus que (u_n) est à termes positifs mais que $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ convergent. Montrer que $\sum \frac{u_n}{1 + u_n}$ converge.

2 Exercices pratiques

Exercice 7. Termes généraux divers et variés. $\bullet\circ\circ - \bullet\bullet\circ$ Dire si les séries suivantes sont convergentes ou pas

1. $\sum \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$
2. $\sum e^{-\sqrt{n}}$
3. $\sum \frac{n}{2^n + n}$
4. $\sum \frac{1}{(n^2 + 1) \sin(1/\sqrt{n})}$
5. $\sum \frac{n^3 \ln(2n)}{3^n}$
6. $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
7. $\sum \frac{n!^2}{(2n)!}$
8. $\sum \frac{1}{\ln(n)^n}$
9. $\sum \frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}$
10. $\sum e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
11. $\sum \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin(x)}{x} dx$
12. $\sum \cos \frac{1}{n^\alpha} \ (\alpha > 0)$
13. $\sum \cos^n \frac{1}{n^\alpha} \ (\alpha > 0)$
14. $\sum \sqrt{\tan \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}}$
15. $\sum \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{dt}{1+t^n}$

Exercice 8. Termes généraux originaux. $\bullet\bullet\bullet$ Déterminer la convergence des séries suivantes :

1. $\sum \frac{1}{nc(n)^\beta}$ où $c(n)$ est le nombre de chiffres en base 10 de n .
2. $\sum \frac{1}{k_n}$ où k_n est le n -ième entier qui s'écrit sans 9.
3. $\sum \sin(2\pi n!e)$ C'est + difficile que les deux autres...

Exercice 9. $\bullet\bullet\circ$ Déterminer la convergence et calculer la somme de la série de terme général $u_n = \frac{n}{7^n}$.

Exercice 10. Lien entre suites et séries. $\bullet\circ\circ$ Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme

1. $w_n = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}$
2. $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$,
3. $v_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$,

Exercice 11. Séries absolument convergentes et alternées. $\bullet\bullet\circ - \bullet\bullet\circ$

Discuter de la convergence des séries suivantes.

1. $\sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^2}$
2. $\sum \frac{(-1)^n}{n^2 + \sin(n^2)}$
3. $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$
4. $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$
5. $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$
6. $\sum \frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n-1}}$
7. $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2 + 1})$
8. $\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$

Exercice 12. ●●○

1. Montrer que pour tout entier naturel n , $(2 - \sqrt{3})^n + (2 + \sqrt{3})^n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la nature de la série de terme général $\sin\left((2 + \sqrt{3})^n \pi\right)$.

Exercice 13. *Équivalents de restes.* ●●○

1. En utilisant une comparaison série-intégrale, montrer que $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \sim \ln(\ln(n))$.
2. Déterminer un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 14. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^3 sur $[-1, 1]$. Quelle est la nature de la série de terme général

$$n \left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(-\frac{1}{n}\right) \right) - 2f'(0)?$$

3 Études plus théoriques

Exercice 15. ●○○ Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs. Montrer que si la série de terme général $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$, alors la série de terme général (u_n) converge.

Exercice 16. ●●○ Soit (u_n) une suite décroissante de réels positifs telle que $\sum u_n$ converge. Étudier la série de terme général $n(u_{n-1} - u_n)$ et en déduire que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 17. ●●○

1. Soient u_n et v_n deux suites à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$ et $\sum u_n$ diverge.

Montrer que $\sum_{k=0}^n u_k \sim_n +\infty \sum_{k=0}^n v_k$.

2. Soient u_n et v_n deux suites à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$ et $\sum u_n$ converge.

Montrer que $\sum_{k \geq n} u_k \sim_n +\infty \sum_{k \geq n} v_k$.

3. Retrouver le lemme de Cesàro.
4. *Une application.* On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 > 0$ et, pour tout n dans \mathbb{N} , $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$.
 - (a) Démontrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
 - (b) Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha$ converge vers une limite finie.
 - (c) En déduire un équivalent, quand n tend vers $+\infty$, de a_n .

Exercice 18. *Une étude fine de la série harmonique.* ●●○

1. Montrer que $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ tend vers une constante. On appellera cette constante constante d'Euler et on la notera γ .
2. À l'aide de la série de terme général $(u_{n+1} - u_n)$ et d'une comparaison série/intégrale, montrer que $u_n - \gamma \sim \frac{1}{2n}$.
3. Montrer enfin que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 19. *Développement décimal d'un réel.* Soit $x \in \mathbb{R}$. Une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée développement décimal de x si $c_0 \in \mathbb{Z}$, si pour tout $k \geq 1$, $c_k \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$, et $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{c_k}{10^k}$.

On définit, pour tout n dans \mathbb{N} , $a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

On définit la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $d_0 = a_0$ et pour tout n dans \mathbb{N}^* , $d_n = 10^n(a_n - a_{n-1})$.

1. Vérifier que si $c_0 \in \mathbb{Z}$, si pour tout $k \geq 1$, $c_k \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$, la série de terme général $\frac{c_k}{10^k}$ converge.

2. Démontrer que $d_n \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$ et $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k}$.

Un développement décimal $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de x est dit **propre** si la suite n'est pas constante à partir d'un certain rang.

3. Démontrer que la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie ci-dessus est un développement décimal propre de x .

4. Démontrer qu'il y a unicité du développement décimal propre d'un réel.

Exercice 20. *Rationnels et développement décimal.* ●●●

Le but de cet exercice est de montrer qu'un réel x est rationnel si et seulement si son développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang. Afin de simplifier les choses, supposons, sans perte de généralité, $x \in]0, 1[$. Posons (d_n) le développement décimal propre de x .

1. Si $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang...

(i) Traduire l'énoncé « $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique de période p à partir d'un certain rang »

(ii) Écrire en séparant et en regroupant convenablement les termes de la série du développement décimal de x le nombre x sous la forme

$$x = a + \frac{10^p}{10^N(10^p - 1)}b,$$

où a et b sont des rationnels et N un entier défini dans la question précédente.

2. Si x est rationnel, écrivons $x = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$. On définit alors les suites (q_k) et (r_k) comme le quotient et le reste de la division euclidienne de $10^k a$ par b .

(i) Montrer qu'il existe deux entiers m et n tels que b divise $10^m a - 10^n a$.

(ii) En déduire que $\frac{10^m a}{b}$ et $\frac{10^n a}{b}$ ont les mêmes décimales après la virgule.

(iii) En explicitant les développements décimaux de $\frac{10^m a}{b}$ et $\frac{10^n a}{b}$, en déduire que (d_n) est périodique à partir d'un certain rang.

Exercice 21. ●●● On s'intéresse à des séries « extrêmes » avec un terme général décroissant très vite ou très lentement.

1. On prend $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = e^{u_n}$. Déterminer la nature de la stg $\frac{n!}{u_n}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f(n) = n \times \ln(n) \times \ln(\ln(n)) \times \dots \times \ln^{(k_n)}(n)$ où $\ln^{(k)}$ est le logarithme itéré k fois et où k_n est le plus grand entier naturel k tel que $\ln^{(k)}(n) \geq 1$. Étudier la nature de la série de terme général $\frac{1}{f(n)}$.

Exercice 22. ●●● Pour n dans \mathbb{N} , on pose $u_n = \text{Arctan}(n+1) - \text{Arctan}(n)$.

1. Montrer que pour tout $(\varepsilon_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, $\sum \varepsilon_n u_n$ converge et que sa somme est dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On définit (ε_n) par

- si $x \leq \frac{\pi}{4}$, $\varepsilon_0 = 0$, sinon $\varepsilon_0 = 1$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, si $x \leq \sum_{k=0}^n \varepsilon_k u_k + u_{n+1}$, $\varepsilon_{n+1} = 0$, sinon $\varepsilon_{n+1} = 1$.

Démontrer que $\sum \varepsilon_n u_n$ a pour somme x .

3. De manière générale, si (u_n) est décroissante positive, si $\sum u_k$ converge et sa somme égale S , à quelle condition sur la suite tout réel x de $[0, S]$ s'écrit-il sous la forme $x = \sum \varepsilon_n u_n$?

Stratégie Il faut absolument faire des exercices pratiques : exercices 7 (jusqu'au (j)) et 9, puis 11 (jusqu'au (e)). Faire aussi 13-1 pour faire une comparaison série-intégrale. Ensuite, faire quelques exercices théoriques, parmi lesquels : 15, 5 et 17.

Indications

- 7 **D'abord** se demander si on ne peut pas simplifier le terme avec un équivalent. Puis, si on a réussi à simplifier, comparer à une série géométrique ou à une série de Riemann. Sinon, des inégalités peuvent fonctionner.
- 8 **1.** Si n s'écrit avec $c(n)$ chiffres en base 10, comment l'encadrer ? Trouver ainsi un équivalent de $c(n)$.
- 2.** Compter le nombre d'entiers à k chiffres qui s'écrivent sans 9. Puis, si $n \in \mathbb{N}$, si k_n est le n -ième nombre sans 9 et $c(k_n)$ son nombre de chiffres, majoter n en fonction de $c(k_n)$.
- 3.** Utiliser le fait que $e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + R_n$, et exprimer $\sin(2\pi n!e)$ à l'aide de R_n seulement.
- 9 La convergence est évidente. Pour la somme, commencer par calculer une somme partielle ! (cf. TD 2)
- 10 Se ramener à une étude de $\sum u_{n+1} - u_n$ et déterminer la convergence de (u_n) .
- 11 Utiliser ou bien la convergence absolue, ou bien le critère des séries alternées. **Attention !** Si on est équivalent à un tg de série alternée qui converge, **cela ne signifie pas** que la série de départ converge ! Faire un dl dans ce cas.
- 12 **1.** Utiliser le binôme de Newton.
- 2.** Exprimer $\sin((2 + \sqrt{3})^n \pi)$ à l'aide de $\sin((2 - \sqrt{3})^n \pi)$ et remarquer que $|2 - \sqrt{3}| < 1$.
- 13 Utiliser les mêmes méthodes qu'en ?? ! (comparaison série-intégrale).
- 14 Utiliser un développement limité donné par la formule de Taylor-Young.
- 15 Que vaut $\prod_{k=0}^n \frac{u_{k+1}}{u_k}$?
- 16 Montrer que $\sum_{n=1}^N n(u_{n-1} - u_n) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, en déduire que $\sum n(u_{n-1} - u_n)$ converge, puis montrer que nu_n converge vers une limite, puis montrer que cette limite est nulle.
- 17 Revenir à la définition de \sim : $u_n \sim v_n$ ssi $\exists(\varepsilon_n)$ tendant vers 0 telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$ à pr. Puis faire soigneusement chaque majoration.
- 5 **1.** Démontrer que $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
- 2.** Faire un équivalent de $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n}$, qui sera négatif à partir d'un certain rang.
- 3.** Démontrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir d'un certain rang, et utiliser l'exercice 15.
- 4.** Penser à une série de Riemann divergente.

- 18
1. Utiliser le fait que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} - \ln(k) + \ln(k-1) \right)$.
 2. Tout est dans la question !
 3. Définir $w_n = v_n - \frac{1}{2n}$, et étudier $\sum w_{k+1} - w_k$, pour montrer que le reste converge et est équivalent à $\frac{1}{2} \frac{1}{6k^2}$.
- 20 L'énoncé me paraît suffisamment détaillé !
- 21
1. Regarder u_1, u_2 et montrer qu'on a très rapidement $u_n \geq n^n$.
 2. Poser $f_i : [u_i, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto t \ln(t) \dots \ln^{(i)}(t)$. La série en question a pour terme général $\frac{1}{f(n)}$ où $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction dont la restriction à $[u_i, u_{i+1}]$ est f_i . Faire alors une comparaison série-intégrale.