N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

DM 22
Pour le lundi 1er juin

Formules

- **Bases** Problème 1, questions 1 à 5 (sans python) ; problème 2 questions 1 à 3.
- **Intermédiaire** Problème 1, questions 1 à 10, problème 2 questions 1 à 4.
- **La Totale !**

Problème 1. Réarrangements de la série harmonique alternée

1. Démontrer qu'il existe un réel γ tel que $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n)+\gamma+o(1)$.

2. Démontrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge.

Un premier réarrangement Dans la série harmonique alternée, on prend p termes positifs, puis q négatifs, puis p positifs, et ainsi de suite... On note S_n la n-ième somme partielle de cette série et $T_k = S_{k(p+q)}$. Par exemple, pour $p=2$ et $q=3$, $T_2 = S_{10} = 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}$.

3. Écrire et commenter une fonction python `S(n,p,q)` donnant la valeur de S_n. Donner les valeurs obtenues pour $n=1000$ et $(p,q)\in\{(2,2),(2,3),(3,2)\}$.

4. Trouver une expression de T_k en fonction de H_{2kp}, H_{kp} et H_{kq}.

5. En déduire la convergence de la suite (T_k), puis celle de la suite (S_n), vers une limite que l'on exprimera en fonction de p et q. Comparer avec les résultats obtenus en 3.

Une autre série alternée Soit $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$.

6. Montrer que la série de terme général u_n converge.

7. Proposer, en la justifiant, une méthode pour déterminer, informatiquement, une approximation numérique de la somme à 10^{-2} près. On ne demande pas nécessairement de programme explicite.

8. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} u_k = (\ln 2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\ln k}{k}$.

9. Via une comparaison série-intégrale, montrer que pour $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\ln k}{k} = \ln(2)\ln(n) + \frac{1}{2}(\ln(2))^2 + O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

10. Déterminer alors la valeur exacte de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

Un réarrangement d'une autre série Soit $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

11. Montrer l'existence d'un réel c tel que $V_n = 2\sqrt{n}+c+o(1)$.

12. On considère la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ dans laquelle on réordonne les termes comme dans la deuxième partie. Montrer que si $p\neq q$ alors la série obtenue est divergente.

Un réarrangement plus subtil Dans la série harmonique alternée, on prend maintenant le premier terme, puis un négatif, puis 2 positifs, puis un négatif, puis 3 positifs, puis un négatif, puis 4 positifs, et ainsi de suite... On note a_n le terme général de cette suite et on note toujours $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Par exemple, $a_1 = 1$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{5}$, et $S_8 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}$.

13. Déterminer $\varphi(n)$ le rang du n-ième terme négatif (par exemple, $\varphi(1) = 2, \varphi(2) = 5$).

14. Montrer que : $S_{\varphi(n+1)} - S_{\varphi(n)} \geqslant \dfrac{n}{2(n+1)(n+2)}$.

15. En déduire que la limite de S_q quand q tend vers l'infini.

Problème 2. Extrait CCINP 2009

I. Définition et propriétés

Soit p et q deux entiers naturels non nuls, soit

$$P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$$

deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ avec $a_p \neq 0, b_q \neq 0$.
Le résultant des polynômes P et Q est le nombre complexe noté $\mathrm{Res}(P,Q)$:

$$\mathrm{Res}(P,Q) = \begin{vmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & \vdots & & b_0 \\ a_p & & a_1 & a_0 \quad \vdots & & b_1 \\ & \ddots & \vdots & a_1 \quad b_q & & \vdots \\ & & a_p & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & a_p & & b_q \end{vmatrix}.$$

C'est un déterminant $q+p$ colonnes, dont les q premières colonnes représentent les coefficients du polynôme P et les p suivantes représentent les coefficients du polynôme Q ; les positions non remplies étant des zéros.
Par exemple, si $P = 1 + 2X + 3X^2$ et $Q = 4 + 5X + 6X^2 + 7X^3$,

$$\mathrm{Res}(P,Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

La matrice servant à définir $\mathrm{Res}(P,Q)$ pourra être notée $M_{P,Q}$:

$$\mathrm{Res}(P,Q) = \det M_{P,Q}.$$

On note $E = \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ et $F = \mathbb{C}_{p+q-1}[X]$.
Soit u l'application de E vers F définie pour $(A,B) \in E$ par : $u(A,B) = PA + QB$.

1. **Cas où u est bijective**
   (a) Démontrer que u est une application linéaire.
   (b) Si on suppose que u est bijective, démontrer que P et Q sont premiers entre eux.

(c) Si on suppose que P et Q sont premiers entre eux, déterminer $\mathrm{Ker}u$ et en déduire que u est bijective.

2. **Matrice de u**
On note $\mathcal{B} = ((1,0),(X,0),...,(X^{q-1},0),(0,1),(0,X),...,(0,X^{p-1}))$ une base de E et $\mathcal{B}' = (1,X,...,X^{p+q-1})$ la base canonique de F.
(a) Déterminer la matrice de u par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
(b) Démontrer que $\mathrm{Res}(P,Q) \neq 0$ si et seulement si, P et Q sont premiers entre eux (donc $\mathrm{Res}(P,Q) = 0$ si et seulement si, P et Q ont au moins une racine commune complexe).

3. **Racine multiple**
(a) Démontrer qu'un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine multiple dans $\mathbb{C}$ si et seulement si, $\mathrm{Res}(P,P') = 0$.
(b) *Application* : déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme $X^3 + aX + b$ admette une racine multiple.

II. Applications

4. **Équation de Bézout**
Dans cette question, on note $P = X^4 + X^3 + 1$ et $Q = X^3 - X + 1$.
(a) Démontrer, en utilisant la première partie, que les polynômes P et Q sont premiers entre eux.
(b) On cherche un couple (A_0, B_0) de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tel que
$$PA_0 + QB_0 = 1.$$
Expliquer comment on peut trouver un tel couple en utilisant la matrice de u puis donner un couple solution.
(c) Déterminer tous les couples (A, B) de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant
$$PA + QB = 1.$$
On pourra commencer par remarquer que, si (A, B) est un couple solution, alors $P(A - A_0) = Q(B_0 - B)$.

(il n'y a pas de question 5, c'est normal ! La question 6 est plus difficile je trouve, elle peut être considérée comme facultative)

6. **Nombre algébrique**
En utilisant les polynômes
$$P(X) = X^2 - 3 \quad \text{et} \quad Q_y(X) = (y - X)^2 - 7,$$
déterminer un polynôme à coefficients entiers de degré 4 ayant comme racine $\sqrt{3} + \sqrt{7}$.
Quelles sont les autres racines de ce polynôme ?