TD 26
Déterminants

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. *CCP*. Calculer le déterminant de $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,i} = 2\cos\theta$, $a_{i,j} = -1$ si $|i-j| = 1$ et $a_{i,j} = 0$ si $|i-j| \geqslant 2$.

Exercice 2. ●○○ Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\phi(A) = A^T$. Calculer le déterminant de ϕ.

Exercice 3. ●●○ On notre $\mathrm{Com}(A)$ la matrice des cofacteurs de A, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que si A est de rang n, il en est de même de $\mathrm{Com}(A)$.
2. Montrer que si A est de rang $n-1$, alors $\mathrm{Com}(A)$ est de rang 1.
3. Montrer que si A est de rang $\leqslant n-2$, alors $\mathrm{Com}(A) = 0_n$.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(X_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une suite de n^2 variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur un espace probabilisé. On appelle A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{pmatrix}$$

et $D = \det(A)$. On note $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ l'espérance et la variance.

1. Calculer $\mathbb{E}(D)$ et $\mathbb{V}(D)$ dans les cas $n = 1$ et $n = 2$. Pour $\mathbb{V}(D)$, on simplifiera les choses en supposant les variables centrées réduites !
2. Plus généralement, démontrer que $\mathbb{E}(D) = \det(M)$ où $M = (\mathbb{E}(X_{ij}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
3. Retrouver le résultat très simplement dans le cas où les variables aléatoires sont iid.

On suppose désormais que pour tout (i, j) dans $[\![1, n]\!]$, X_{ij} est centrée réduite.

4. Soit σ et τ deux permutations de $\mathcal{S}_n$. Démontrer que $\mathrm{Cov}\left(\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i}, \prod_{j=1}^{n} X_{\tau(j),j}\right) = \begin{cases} 0 \text{ si } \sigma \neq \tau \\ 1 \text{ si } \sigma = \tau \end{cases}$
5. En déduire que la variance de D est égale à $n!$.

Exercice 5. ●●◐ Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B sont semblables sur $\mathbb{C}$, ie qu'il existe $P \in Gl_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PBP^{-1}$. On veut montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.
Soit $P = U + iV$ avec $U \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $V \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, P inversible, telle que $A = PBP^{-1}$.

1. Démontrer que $AU = UB$ et $AV = VB$.
2. Pourquoi la question précédente ne suffit-elle pas à conclure ?
3. Démontrer que pour tout t dans $\mathbb{R}$, $A(U + tV) = (U + tV)B$.
4. Démontrer que pour tout t dans $\mathbb{R}$, $\det(U + tV)$ est polynomiale en t.
5. Conclure qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $U + t_0V$ est inversible, et conclure.

Stratégie. Faites quelques calculs de 6, un calcul de déterminant tridiagonal si ce n'est pas assimilé (8), un autre calcul par récurrence (9), un calcul de déterminant qui utilise une technique plus subtile. Pour ce faire, au choix, un polynôme (14, la n-linéarité (13) ou une fonction auxilliaire (15)). Je conseillerais plutôt 15. Faire ensuite un peu d'exercices théoriques (18 et 20).

2 Calculs de déterminants

Exercice 6. ●○○ – ●●○ Calculer les déterminants suivants. Dans le cas où le déterminant dépend de paramètres, en donner une forme factorisée et condensée. *On n'hésitera pas à utiliser les indications.*

3 **1**. $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$,

2. $B = \begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & x & 0 \end{vmatrix}$,

3. $C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$,

4. $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$,

5. $E = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$,

6. $F = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin(a) & \sin(b) & \sin(c) \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \end{vmatrix}$.

Exercice 7. ●◐○ Montrer que le déterminant suivant est indépendant de $t \in \mathbb{R}$

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} \cos(a+t) & \cos(b+t) & \cos(c+t) \\ \sin(a+t) & \sin(b+t) & \sin(c+t) \\ \sin(b-c) & \sin(c-a) & \sin(a-b) \end{vmatrix}.$$

Exercice 8. ●◐○ Soit $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}_{[n]}$.

1. Établir une relation de récurrence entre D_{n+2}, D_{n+1} et D_n, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.
2. Calculer D_n en fonction de n, $n \geqslant 1$.
3. Pour $a \in \mathbb{K}^*$, calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 2a & a & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ (0) & & a & 2a \end{vmatrix}$$

Exercice 9. ●◐○ Calculer, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$

Exercice 10. ●●○ Calculer, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}_{[n]}$.

Exercice 11. ●●○ Montrer que pour tout $n \geqslant k+2$, le déterminant suivant est nul :

$$D(n,k) = \begin{vmatrix} 1^k & 2^k & \cdots & n^k \\ 2^k & 3^k & \cdots & (n+1)^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^k & (n+1)^k & \cdots & (2n-1)^k \end{vmatrix}_{[n]}.$$

On pourra introduire les polynômes $P_j = (X+j-1)^k$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Exercice 12. ●●○ Soit $A_n = (a_{ij})$, où $a_{ij} = \binom{i+j-2}{j-1}$, où $1 \leqslant i, j \leqslant n+1$.

1. Calculer $\det(A_1)$, $\det(A_2)$, $\det(A_3)$.
2. En utilisant la formule du triangle de Pascal, calculer $\det(A_n)$.

Exercice 13. ●●○ Soient X et Y dans $\mathbb{R}^n$. Calculer $\det(\mathrm{I}_n + XY^T)$.

Exercice 14. ●●◐ Calculer le déterminant de Vandermonde lacunaire suivant

$$D(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0^{k-1} & a_1^{k-1} & \cdots & a_{n-1}^{k-1} \\ a_0^{k+1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_{n-1}^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \cdots & a_{n-1}^n \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 15. ●●◐ On pose $A = \begin{pmatrix} c_1 & a & \cdots & a \\ b & c_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & c_n \end{pmatrix}$ où $(c_1, c_2, \dots, c_n, a, b) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $a \neq b$

1. Soit J_n la matrice composée uniquement de 1. Montrer que la fonction de la variable réelle $\varphi : x \mapsto \det(A - xJ_n)$ est polynômiale de degré 1.
2. Calculer $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.
3. En déduire la valeur de $\det(A)$.
4. Que se passe-t-il quand $a = b$?

Exercice 16. ●●◐ Soit n un entier naturel non nul, $\omega_n = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$. On pose Φ_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de coefficients $(\omega_n^{(p-1)(q-1)})_{1 \leqslant p,q \leqslant n}$. On cherche dans cet exercice à calculer le déterminant de Φ_n.

1. En posant $\overline{\Phi_n}$ la matrice constituée des conjugués des coefficients de Φ_n, et en calculant $\Phi_n\overline{\Phi_n}$, déterminer le module de $\det(\Phi_n)$.
2. Montrer que $\det(\Phi_n) = \displaystyle\prod_{0 \leqslant p < q \leqslant n-1} (\omega_n^q - \omega_n^p)$.
3. Démontrer que $\displaystyle\sum_{0 \leqslant p < q \leqslant n-1} (p+q) = \frac{n(n-1)^2}{2}$.

4. En déduire qu'un argument de $\det(\Phi_n)$ est $\dfrac{\pi}{4}(n-1)(3n-2)$.

Exercice 17. ●●● Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes, $\omega = e^{2i\pi/n}$, et A et Φ_n les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}, \ M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det(AM)$ et en déduire $\det(A)$.

3 Exercices plus théoriques

Exercice 18. ●○○ Montrer que si n est impair, aucune matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ antisymétrique n'est inversible.

Exercice 19. ●○○ Montrer que la comatrice d'une matrice symétrique est symétrique.

Exercice 20. ●●◐ Soient A une matrice inversible et B une matrice quelconque. Montrer qu'il existe un voisinage J de 0 tel que $\forall x \in J$, $A + xB$ est inversible.

Exercice 21. *Navale*. ●●○

1. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(C+M) = \det M$. Montrer que $C = 0$.
2. Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(A+M) = \det(B+M)$. Montrer que $A = B$.
3. Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. On suppose : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(A+M) = \det(B+M^T)$. Montrer que $A = B^T$.

Indications.

1 C'est juste un déterminant tridiagonal !

2 S'inspirer de l'exercice visant à calculer la trace de l'application de transposition.

3 **1.** Utiliser la formule $A\mathrm{Com}(A)^T = \dots$

2. Montrer que $A\mathrm{Com}(A)^T = 0$, d'intéresser à une inclusion d'une image dans un noyau. Puis parler de déterminant extrait...

3. Parler de déterminants extraits.

5 Les questions sont très guidées. Pour la dernière, penser au fait qu'un polynôme qui ne s'annule pas en i n'est pas nul et ne s'annule donc pas sur tout $\mathbb{R}$.

6 **1.** Faire un calcul direct.

2. N'y a-t-il pas des lignes identiques ?

3. Faire des opérations sur les lignes pour échelonner la matrice.

4. Faire $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ et $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$

5. Sommer toutes les colonnes sur la première.

6. Soustraire la colonne 1 aux colonnes 2 et 3, puis utiliser ses formules de trigo !

7 Factoriser par $\dfrac{1}{\sin(t)}$, puis effectuer des opérations sur les lignes ($L_1 \leftarrow L_1 - \cos(t)L_2$ et $L_2 \leftarrow L_2 + \cos(t)L_1$)

8 **1.** Il s'agit d'un déterminant tridiagonal !

2. Il s'agit d'une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

3. Faire de même...

9 Soustraire la seconde colonne à la première, et développer. Puis, dans le deuxième déterminant, essayer d'obtenir un déterminant triangulaire avec une diagonale de 1.

10 Développer selon la première ligne et développer le second déterminant selon la première ligne.

11 Démontrer que la famille des $P_j = (X + j - 1)^k$, $1 \leqslant j \leqslant n$ est liée si $n \geqslant \dim(\mathbb{R}_k[X]) + 1 = k + 2$.

12 Effectuer **dans l'ordre** $L_n \leftarrow L_{n-1}$, $L_{n-1} \leftarrow L_{n-2}$, etc.

13 D'abord, montrez que $\mathrm{I}_n + XY^T = (y_1X + e_1, y_2X + e_2, \dots, y_nX + e_n)$. Puis utiliser la n-linéarité, et se rendre compte que beaucoup de déterminants sont nuls...

14 Partir de l'argument polynomial du calcul du déterminant de Vandermonde classique et considérer

$$P(X) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & X \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0^{k-1} & a_1^{k-1} & \cdots & a_{n-1}^{k-1} & X^{k-1} \\ a_0^{k} & a_1^{k} & \cdots & a_{n-1}^{k} & X^{k} \\ a_0^{k+1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_{n-1}^{k+1} & X^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0^{n} & a_1^{n} & \cdots & a_{n-1}^{n} & X^{n} \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

15 **1.** Faire les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour tout i dans $[\![2, n]\!]$.

2. Ce sont juste de simples calculs de déterminants triangulaires.

3. Il s'agit de retrouver le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine d'une fonction affine.

4. Calculer à la main le déterminant ou faire une limite de fonctions !

16 **1.** Montrer que $\Phi_n\overline{\Phi_n} = nI_n$.

2. Utiliser une matrice de Vandermonde.

3. Commencer par calculer $\displaystyle\sum_{0\leqslant p,q\leqslant n-1}(p+q)$.

4. Démontrer que $\det(\Phi_n)=\exp\left(\dfrac{i\pi}{n}\displaystyle\sum_{0\leqslant p<q\leqslant n-1}(p+q)\right)\prod_{0\leqslant p<q\leqslant n-1}2i\sin\left(\dfrac{(q-p)\pi}{n}\right)$.

16 Reconnaître dans $\det(AM)$ et $\det(M)$ deux déterminants de Vandermonde.

18 Que vaut $\det(A^T)$?

19 Revenir à la définition de la comatrice.

20 Utiliser le fait que le déterminant de $A+tM$ est polynomial donc continu !

21 Utiliser le fait que toute matrice est équivalente à $J_{n,n,r}$. Et montrer que dans ce cas, si C est équivalente à $J_{n,n,r}$, r doit être nul. POur la suite, ce sont des adaptations de la première question.