MPSI1 – Programme de colles – Semaine 29 – du 1er au 5 juin 2026

Séries numériques

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Convergence et divergence	
Sommes partielles d'une série numérique. Convergence, divergence, somme.	La série est notée $\sum u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Reste d'une série convergente.	
Lien suite-série.	La suite (u_n) et la série télescopique $\sum(u_{n+1}-u_n)$ sont de même nature.
Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme.	
Relation $e^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour $z \in \mathbb{C}$.	**NON FAIT ICI**, je le ferai au chapitre de familles sommables.
b) Séries à termes positifs ou nuls	
Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout n, la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.	
Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles.	Application à l'étude de sommes partielles.
Séries de Riemann.	
c) Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes	
Une série numérique absolument convergente est convergente.	Le critère de Cauchy est hors programme.
Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.	
d) Théorème des séries alternées	
Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers 0, $\sum(-1)^n u_n$ converge.	Signe et majoration en valeur absolue de la somme, des restes.

Groupe symétrique et déterminants

B - Déterminants

Les objectifs de cette partie sont les suivants :

— *introduire la notion de déterminant d'une famille de vecteurs, en motivant sa construction par la géométrie ;*

— *établir les principales propriétés des déterminants des matrices carrées et des endomorphismes ;*

— *indiquer quelques méthodes simples de calcul de déterminants.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Formes n-linéaires alternées	
Forme n-linéaire alternée sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Antisymétrie, effet d'une permutation.	La définition est motivée par les notions intuitives d'aire et de volume algébriques, en s'appuyant sur des figures. Si f est une forme n-linéaire alternée et si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille liée, alors $f(x_1,\dots,x_n)=0$.
b) Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base	
Si e est une base, il existe une unique forme n-linéaire alternée f pour laquelle $f(e)=1$; toute forme n-linéaire alternée est un multiple de $\det_e$.	Notation $\det_e$. La démonstration de l'existence n'est pas exigible.
Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées.	Dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallélépipède).
Comparaison, si e et e' sont deux bases, de $\det_e$ et $\det_{e'}$. La famille $(x_1,\dots,x_n)$ est une base si et seulement si $\det_e(x_1,\dots,x_n)\neq 0$.	
c) Déterminant d'un endomorphisme	
Déterminant d'un endomorphisme.	
Déterminant d'une composée.	Caractérisation des automorphismes.
d) Déterminant d'une matrice carrée	
Déterminant d'une matrice carrée.	Caractère n-linéaire alterné du déterminant par rapport aux colonnes.
Déterminant d'un produit.	Relation $\det(\lambda A)=\lambda^n \det(A)$.
Caractérisation des matrices inversibles. L'application $\det$ induit un morphisme de $\mathrm{GL}(E)$ (resp. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$) sur $\mathbb{K}^*$.	
Déterminant d'une transposée.	Caractère n-linéaire alterné du déterminant par rapport aux lignes.
e) Calcul des déterminants	
Effet des opérations élémentaires. Cofacteur. Développement par rapport à une ligne ou une colonne. Déterminant d'une matrice triangulaire.	

Organisation de la colle.

- Cours sur les séries et sur les déterminants.
  NB : contrairement à ce qui est proposé dans la progression du programme, le cours a été construit ainsi
  - formule du déterminant d'une matrice carrée (et, au passage, un lemme technique sur le fait qu'une forme f n-linéaire alternée sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est égale à $f(I_n) \times \det$),
  - calculs concrets de déterminants,
  - déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme
  - Vandermonde ; comatrice (pas encore fait)
- Exercices sur les séries uniquement. Éventuellement des déterminants jeudi, vendredi.

Exemples de questions de cours

1. Théorème de comparaison des séries à termes positifs.
2. Séries de Riemann.
3. La convergence absolue implique la convergence.
4. Séries alternées.

5. Déterminant d'une transposée.
6. Le déterminant est une forme n-linéaire alterné.
7. Si f est une forme n-linéaire alternée sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors $f = f(I_n) \times \det$
8. Déterminant par blocs.
9. Déterminant d'un produit et lien entre déterminant et inversibilité.
10. Lien entre déterminant et opérations élémentaires.
11. Développement selon une ligne ou une colonne.
12. Calcul d'un déterminant tridiagonal.
13. Déterminant d'un endomorphisme : définition.