TD 26
Déterminants

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. *CCP*. Calculer le déterminant de $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,i} = 2\cos\theta$, $a_{i,j} = -1$ si $|i-j| = 1$ et $a_{i,j} = 0$ si $|i-j| \geqslant 2$.

Exercice 2. ●○○ Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\phi(A) = A^T$. Calculer le déterminant de ϕ.

Correction. Déjà, la transposée est une involution, donc $\det(\phi)^2 = 1$. Maintenant, quand est-il égal à 1 ou à -1 ?
Comme la transposée est une involution, **c'est une symétrie**, par rapport aux matrices symétriques, parallèlement aux matrices antisymétriques. Soit une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de matrices symétriques et antisymétriques. alors la matrice de ϕ dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Donc le déterminant de ϕ est $(-1)^{\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Exercice 3. ●●○ On notre $\mathrm{Com}(A)$ la matrice des cofacteurs de A, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que si A est de rang n, il en est de même de $\mathrm{Com}(A)$.

   Correction. Si A est de rang n, alors A est inversible, donc comme $A\mathrm{Com}(A)^T = \det(A)\mathrm{I}_n$, $\mathrm{Com}(A)$ est inversible, donc de rang n.

2. Montrer que si A est de rang $n-1$, alors $\mathrm{Com}(A)$ est de rang 1.

   Correction. Si A est de rang $n-1$, alors $A\mathrm{Com}(A)^T = 0$, i.e. $\mathrm{Im}(\mathrm{Com}(A)) \subset \ker(A)$, donc $\mathrm{Com}(A)$ est de rang inférieur ou égal à 1. Elle n'est pas nulle car A est de rang $n-1$ donc contient un déterminant de taille $n-1$ non nul.

3. Montrer que si A est de rang $\leqslant n-2$, alors $\mathrm{Com}(A) = 0_n$.

   Correction. Si A est de rang $n-2$, tous les déterminants de taille $n-1$ sont nuls, donc $\mathrm{Com}(A) = 0$.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(X_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une suite de n^2 variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur un espace probabilisé. On appelle A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{pmatrix}$$

et $D = \det(A)$. On note $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ l'espérance et la variance.

1. Calculer $\mathbb{E}(D)$ et $\mathbb{V}(D)$ dans les cas $n = 1$ et $n = 2$. Pour $\mathbb{V}(D)$, on simplifiera les choses en supposant les variables centrées réduites !
2. Plus généralement, démontrer que $\mathbb{E}(D) = \det(M)$ où $M = (\mathbb{E}(X_{ij}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

3. Retrouver le résultat très simplement dans le cas où les variables aléatoires sont iid.

On suppose désormais que pour tout (i,j) dans $[\![1,n]\!]$, X_{ij} est centrée réduite.

4. Soit σ et τ deux permutations de $\mathcal{S}_n$. Démontrer que $\mathrm{Cov}\left(\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i}, \prod_{j=1}^{n} X_{\tau(j),j}\right) = \begin{cases} 0 \text{ si } \sigma \neq \tau \\ 1 \text{ si } \sigma = \tau \end{cases}$

5. En déduire que la variance de D est égale à $n!$.

Exercice 5. ●●◐ Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B sont semblables sur $\mathbb{C}$, ie qu'il existe $P \in Gl_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PBP^{-1}$. On veut montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.
Soit $P = U + iV$ avec $U \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $V \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, P inversible, telle que $A = PBP^{-1}$.

1. Démontrer que $AU = UB$ et $AV = VB$.

2. Pourquoi la question précédente ne suffit-elle pas à conclure ?

3. Démontrer que pour tout t dans $\mathbb{R}$, $A(U + tV) = (U + tV)B$.

4. Démontrer que pour tout t dans $\mathbb{R}$, $\det(U + tV)$ est polynomiale en t.

5. Conclure qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $U + t_0V$ est inversible, et conclure.

Correction. Un joli exercice ! A et B sont semblables sur $\mathbb{C}$, donc on dispose de G dans $GL_n(\mathbb{C})$ telle que $GAG^{-1} = B$, i.e. $GA = BG$. Écrivons $G = U + iV$. Alors $(U + iV)A = B(U + iV)$, soit, en identifiant parties réelle et imaginaire, $UA = BU$ et $VA = BV$. G est inversible, donc $\det(U + iV) \neq 0$. Donc le polynôme $x \mapsto \det(U + xV)$ n'est pas le polynôme nul, donc on dispose de a dans $\mathbb{R}$ tel que $\det(U + aV) \neq 0$. Posons alors $P = U + aV$. Alors P est inversible et $PA = UA + aVA = BU + aBV = BP$. D'où le résultat !

Stratégie. Faites quelques calculs de 6, un calcul de déterminant tridiagonal si ce n'est pas assimilé (8), un autre calcul par récurrence (9), un calcul de déterminant qui utilise une technique plus subtile. Pour ce faire, au choix, un polynôme (14, la n-linéarité (13) ou une fonction auxilliaire (15)). Je conseillerais plutôt 15. Faire ensuite un peu d'exercices théoriques (18 et 20).

2 Calculs de déterminants

Exercice 6. ●○○ – ●●○ Calculer les déterminants suivants. Dans le cas où le déterminant dépend de paramètres, en donner une forme factorisée et condensée. *On n'hésitera pas à utiliser les indications.*

3

1. $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$,
2. $B = \begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & x & 0 \end{vmatrix}$,
3. $C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$,
4. $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$,
5. $E = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$,
6. $F = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin(a) & \sin(b) & \sin(c) \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \end{vmatrix}$.

Correction.

(i) On trouve $A = 5$.

(ii) Le déterminant comporte deux lignes identiques : il est nul !

(iii) On trouve $C = 0$.

(iv) On effectue $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ et $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ pour obtenir

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ b+c & b-c & a-c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & \\ b+c & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

(v) On remarque que la somme des termes de chaque ligne est la même : il peut donc être judicieux de sommer toutes les colonnes sur la première pour factoriser ensuite !

$$E = \begin{vmatrix} a+b+2c & c & c & b \\ a+b+2c & a & b & c \\ a+b+2c & b & a & c \\ a+b+2c & c & c & a \end{vmatrix} = (a+b+2c) \begin{vmatrix} 1 & c & c & b \\ 1 & a & b & c \\ 1 & b & a & c \\ 1 & c & c & a \end{vmatrix}.$$

Ensuite, on soustrait la première ligne à toutes les autres, pour obtenir

$$\begin{aligned} E &= (a+b+2c) \begin{vmatrix} 1 & c & c & b \\ 0 & a-c & b-c & c-b \\ 0 & b-c & a-c & c-b \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} \\ &= (a+b+2c) \begin{vmatrix} a-c & b-c & c-b \\ b-c & a-c & c-b \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} \quad \text{(développement selon la première colonne)} \\ &= (a+b+2c)(a-b) \begin{vmatrix} a-c & b-c \\ b-c & a-c \end{vmatrix} \quad \text{(développement selon la dernière ligne)} \\ &= (a+b+2c)(a-b)((a-c)^2 - (b-c)^2) \\ &= (a+b+2c)(a-b)^2(a+b-2c). \end{aligned}$$

(vi) On soustrait la colonne 1 aux colonnes 2 et 3 :

$$F = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sin(a) & \sin(b) - \sin(a) & \sin(c) - \sin(a) \\ \cos(a) & \cos(b) - \cos(a) & \cos(c) - \cos(a) \end{vmatrix}.$$

Or,

- $\sin(b) - \sin(a) = 2\sin\frac{b-a}{2}\cos\frac{a+b}{2}$
- $\sin(c) - \sin(a) = 2\sin\frac{c-a}{2}\cos\frac{a+c}{2}$
- $\cos(b) - \cos(a) = -2\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{a+b}{2}$
- $\cos(c) - \cos(a) = -2\sin\frac{c-a}{2}\sin\frac{a+c}{2}$

Donc

$$\begin{aligned}
F &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sin(a) & 2\sin\frac{b-a}{2}\cos\frac{a+b}{2} & 2\sin\frac{c-a}{2}\cos\frac{a+c}{2} \\ \cos(a) & -2\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{a+b}{2} & -2\sin\frac{c-a}{2}\sin\frac{a+c}{2} \end{vmatrix} \\
&= 2\sin\frac{b-a}{2} 2\sin\frac{c-a}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sin(a) & \cos\frac{a+b}{2} & \cos\frac{a+c}{2} \\ \cos(a) & -\sin\frac{a+b}{2} & -\sin\frac{a+c}{2} \end{vmatrix} \text{ (par linéarité par rapport aux colonnes)} \\
&= 4\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{c-a}{2}\left(-\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a+c}{2} + \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+c}{2}\right) \text{ (dvt par rapport à la dernièr ligne)} \\
&= 4\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{c-a}{2}\sin\frac{c-b}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 7. ●◐○ Montrer que le déterminant suivant est indépendant de $t \in \mathbb{R}$

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} \cos(a+t) & \cos(b+t) & \cos(c+t) \\ \sin(a+t) & \sin(b+t) & \sin(c+t) \\ \sin(b-c) & \sin(c-a) & \sin(a-b) \end{vmatrix}.$$

Correction. Supposons $t \neq 0[\pi]$. Alors

$$\Delta(t) = \frac{1}{\sin(t)} \begin{vmatrix} \cos(a+t)\sin(t) & \cos(b+t)\sin(t) & \cos(c+t)\sin(t) \\ \sin(a+t) & \sin(b+t) & \sin(c+t) \\ \sin(b-c) & \sin(c-a) & \sin(a-b) \end{vmatrix}.$$

Effectuons $L_1 \leftarrow L_1 - \cos(t)L_2$. On obtient

$$\begin{aligned}
\Delta(t) &= \frac{1}{\sin(t)} \begin{vmatrix} \sin(-a) & \sin(-b) & \sin(-c) \\ \sin(a+t) & \sin(b+t) & \sin(c+t) \\ \sin(b-c) & \sin(c-a) & \sin(a-b) \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\sin(t)} \begin{vmatrix} \sin(-a) & \sin(-b) & \sin(-c) \\ \sin(a)\cos(t) + \sin(t)\cos(a) & \sin(b)\cos(t) + \sin(t)\cos(b) & \sin(c)\cos(t) + \sin(t)\cos(c) \\ \sin(b-c) & \sin(c-a) & \sin(a-b) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

On effectue $L_2 \leftarrow L_2 + \cos(t)L_1$:

$$\begin{aligned}
\Delta(t) &= \frac{1}{\sin(t)} \begin{vmatrix} \sin(-a) & \sin(-b) & \sin(-c) \\ \sin(t)\cos(a) & \sin(t)\cos(b) & \sin(t)\cos(c) \\ \sin(b-c) & \sin(c-a) & \sin(a-b) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \sin(-a) & \sin(-b) & \sin(-c) \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \\ \sin(b-c) & \sin(c-a) & \sin(a-b) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

D'où le résultat. Il est toujours valable en $t = 0[\pi]$ par continuité de la fonction $t \mapsto \Delta(t)$.

Exercice 8. ●◐○ Soit $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}_{[n]}$.

1. Établir une relation de récurrence entre D_{n+2}, D_{n+1} et D_n, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

> **Correction.** Il s'agit d'un déterminant tridiagonal, on trouve
> $$D_{n+2} = (a+b)D_{n+1} - abD_n,$$

2. Calculer D_n en fonction de n, $n \geqslant 1$.

> **Correction.** Il s'agit d'une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - (a+b)x + ab = 0$, i.e. $(x-a)(x-b) = 0$. Donc
> - si a ou $b = 0$, le déterminant à calculer est triangulaire inférieur, donc $D_n = (a+b)^n$.
> - Si $a \neq b$, on dispose de A et B tels que $D_n = Aa^n + Bb^n$. Or $D_1 = a+b$ et $D_2 = (a+b)^2 - ab = a^2 + ab + b^2$, donc $Aa + Bb = a+b$ et $Aa^2 + Bb^2 = a^2 + ab + b^2$, d'où, en soustrayant $a\times$ la première équation à la seconde, $Bb(b-a) = b^2$, donc, $B = \dfrac{b}{b-a}$. De même, $A = -\dfrac{a}{b-a}$, donc $D_n = \dfrac{1}{a-b}(a^{n+1} - b^{n+1})$.
> - Si $a = b$, alors on dispose de A et B tels que $D_n = (A+Bn)a^n$. Or, $D_1 = 2a$ et $D_2 = 3a^2$ donc $(A+B)a = 2a$ et $(A+2b)a^2 = 3a^2$ donc $A = B = 1$, donc $D_n = (1+n)a^n$.

3. Pour $a \in \mathbb{K}^*$, calculer
$$D_n = \begin{vmatrix} 2a & a & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ (0) & & a & 2a \end{vmatrix}$$

> **Correction.** Il s'agit encore d'un déterminant tridiagonal. On développe selon la première ligne
> $$D_n = 2a \begin{vmatrix} 2a & a & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ (0) & & a & 2a \end{vmatrix}_{[n-1]} - a \begin{vmatrix} a & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2a & a & & (0) \\ & a & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a \\ (0) & & & a & 2a \end{vmatrix}_{[n-1]}$$
> On développe le second déterminant selon la première colonne
> $$D_n = 2aD_{n-1} - a^2 D_{n-2},$$
> donc (D_n) vérifie la relation de récurrence $D_{n+2} - 2aD_{n+1} + a^2 D_n = 0$, d'équation caractéristique $(x-a)^2 = 0$, d'où une racine double d'où deux réels A et B tels que pour tout n dans $\mathbb{N}$,
> $$D_n = (An+B)a^n.$$
> Or, $D_1 = 2a$ et $D_2 = 3a^2$, donc $A + B = 2$ et $2A + B = 3$, donc $A = B = 1$. Donc pour tout entier naturel n, $D_n = (n+1)a^n$.

Exercice 9. ●◐○ Calculer, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$

Correction. Soustrayons la seconde colonne à la première. On obtient

$$D_n = \begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]},$$

soit, en développant selon la première colonne,

$$D_n = -D_{n-1} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Dans le deuxième déterminant, ajoute L_1 à chaque ligne pour obtenir un déterminant triangulaire avec une diagonale de 1. Donc $D_n = -D_{n-1} + 1$, donc, comme $D_2 = 1$ et $D_1 = 0$, on a par une récurrence immédiate $D_n = 0$ si n est impair et 1 si n est pair.

Exercice 10. ●●○ Calculer, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}_{[n]}.$

Correction. On effectue les opérations $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$, etc. et on obtient

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & -a_1 & -a_1 & \cdots & -a_1 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}_{[n]}$$

On effectue les opérations $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$, $C_4 \leftarrow C_4 - C_2$, etc. et on obtient

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & -a_2 & \cdots & -a_2 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}_{[n]}$$

On continue de la sorte et on obtient

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & -a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1} & -a_{n-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}_{[n]}$$

On développe selon la première ligne

$$\Delta_n = (1+a_1) \begin{vmatrix} a_2 & -a_2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a_{n-1} & -a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}_{[n]} + a_1 \begin{vmatrix} 1 & -a_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a_{n-1} & -a_{n-1} \\ 1 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}_{[n]}$$

Or, $\begin{vmatrix} a_2 & -a_2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a_{n-1} & -a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}_{[n]} = \prod_{k=2}^{n} a_k$, et, en développant le second déterminant selon la première ligne,

$$\begin{vmatrix} 1 & -a_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a_{n-1} & -a_{n-1} \\ 1 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}_{[n]} = \begin{vmatrix} a_3 & -a_3 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a_{n-1} & -a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}_{[n]} + a_2 \begin{vmatrix} 1 & -a_3 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a_{n-1} & -a_{n-1} \\ 1 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}_{[n]}$$
$$= \prod_{k=3}^{n} a_k + a_2 \begin{vmatrix} 1 & -a_3 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a_{n-1} & -a_{n-1} \\ 1 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Une récurrence immédiate montre que

$$\Delta_n = \prod_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq k}} a_j.$$

Exercice 11. ●●○ Montrer que pour tout $n \geqslant k+2$, le déterminant suivant est nul :

$$D(n,k) = \begin{vmatrix} 1^k & 2^k & \cdots & n^k \\ 2^k & 3^k & \cdots & (n+1)^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^k & (n+1)^k & \cdots & (2n-1)^k \end{vmatrix}_{[n]}.$$

On pourra introduire les polynômes $P_j = (X+j-1)^k$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Correction. La famille des $P_j = (X+j-1)^k$, $1 \leqslant j \leqslant n$ est une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}_k[X]$, nécessairement liée si $n \geqslant \dim(\mathbb{R}_k[X]) + 1 = k + 2$. Donc la famille de vecteurs

$$\begin{pmatrix} P_1(1) \\ P_1(2) \\ \vdots \\ P_1(n) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_2(1) \\ P_2(2) \\ \vdots \\ P_2(n) \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} P_n(1) \\ P_n(2) \\ \vdots \\ P_n(n) \end{pmatrix}$$

est liée, i.e. les colonnes du déterminant à calculer sont liées, donc ce déterminant est nul.

Exercice 12. ●●○ Soit $A_n = (a_{ij})$, où $a_{ij} = \binom{i+j-2}{j-1}$, où $1 \leqslant i, j \leqslant n+1$.

1. Calculer $\det(A_1)$, $\det(A_2)$, $\det(A_3)$.

Correction. On remarque que $\det(A_1) = \left|\binom{0}{0}\right| = 1$, $\det(A_2) = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$, et

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \binom{2}{2} \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \binom{3}{2} \\ \binom{2}{0} & \binom{3}{1} & \binom{4}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1.$$

2. En utilisant la formule du triangle de Pascal, calculer $\det(A_n)$.

Correction. De manière générale,

$$\det(A_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \cdots & \cdots & \binom{n+1}{n} \\ \binom{2}{0} & \binom{3}{1} & \cdots & \cdots & \binom{n+2}{n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \binom{n}{0} & \binom{n+1}{1} & \cdots & \cdots & \binom{2n}{n} \end{vmatrix}$$

Effectuons, **dans l'ordre** $L_n \leftarrow L_{n-1}$, $L_{n-1} \leftarrow L_{n-2}$, etc. On remarque que la première colonne est alors nulle et, si $j \geqslant 2$, par la formule du triangle de Pascal, que $\binom{i+1+j-2}{j-1} - \binom{i+j-2}{j-1} = \binom{i+j-2}{j-2}$, donc

$$\det(A_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \binom{1}{0} & \cdots & \cdots & \binom{n}{n-1} \\ 0 & \binom{2}{0} & \cdots & \cdots & \binom{n+1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \binom{n-1}{0} & \cdots & \cdots & \binom{2n-1}{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \binom{1}{0} & \cdots & \cdots & \binom{n}{n-1} \\ \binom{2}{0} & \cdots & \cdots & \binom{n+1}{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \binom{n}{0} & \cdots & \cdots & \binom{2n-1}{n-1} \end{vmatrix},$$

soit, en effectuant $C_n \leftarrow C_{n-1}$ puis $C_{n-1} \leftarrow C_{n-2}$..., et en utilisant, pour la première colonne, que $\binom{k}{0} = \binom{k-1}{0} = 1$,

$$\det(A_n) = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \dots & \dots & \binom{n-1}{n-1} \\ \binom{1}{0} & \dots & \dots & \binom{n}{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \binom{n-1}{0} & \dots & \dots & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix} = D_{n-1},$$

donc D_n est constant, égal à $D_1 = 1$.

Exercice 13. ●●○ Soient X et Y dans $\mathbb{R}^n$. Calculer $\det(\mathrm{I}_n + XY^T)$.

Correction. Il faut d'abord bien se représenter XY^T ! Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, alors $XY^T = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{pmatrix}$, et donc

$$\mathrm{I}_n + XY^T = \begin{pmatrix} x_1y_1+1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2+1 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n+1 \end{pmatrix} = (y_1X + e_1, y_2X + e_2, \dots, y_nX + e_n),$$

où $(e_1, \dots, e_n)$ sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
D'où

$$\det(\mathrm{I}_n + XY^T) = \det(y_1X + e_1, y_2X + e_2, \dots, y_nX + e_n).$$

Commençons à utiliser la linéarité par rapport à la première, puis à la seconde variable :

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{I}_n + XY^T) &= \det(y_1X, y_2X + e_2, \dots, y_nX + e_n) + \det(e_1, y_2X + e_2, \dots, y_nX + e_n) \\ &= \det(y_1X, y_2X, \dots, y_nX + e_n) + \det(y_1X, e_2, \dots, y_nX + e_n) \\ &\quad + \det(e_1, y_2X, \dots, y_nX + e_n) + \det(e_1, e_2, \dots, y_nX + e_n) \end{aligned}$$

Le premier de ces quatre termes est nul par le caractère alterné du déterminant. En poursuivant le développement par linéarité sur chacune des variables, on remarque que tous les déterminants de la forme

$$\det(\dots, y_iX, \dots, y_jX, \dots)$$

sont nuls ! Autrement dit, les seuls déterminants restants sont ceux ne faisant intervenir qu'un seul ou aucuny_iX, et que des e_k par ailleurs. D'où

$$\det(\mathrm{I}_n + XY^T) = \det(e_1, \dots, e_n) + \sum_{k=1}^{n} \det(e_1, \dots, e_{k-1}, y_kX, e_k, \dots, e_n).$$

Or, $\det(e_1, \dots, e_{k-1}, y_k X, e_k, \dots, e_n) = y_k \det(e_1, \dots, e_{k-1}, X, e_k, \dots, e_n)$, et

$$\begin{aligned}\det(e_1, \dots, e_{k-1}, X, e_k, \dots, e_n) &= \begin{vmatrix} 1 & & x_1 & & \\ & \ddots & \vdots & (0) & \\ & & x_k & & \\ & (0) & \vdots & \ddots & \\ & & x_n & & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & & x_1 & & \\ & \ddots & \vdots & (0) & \\ & & x_k & & \\ & (0) & 0 & \ddots & \\ & & 0 & & 1 \end{vmatrix} \\ &= y_k,\end{aligned}$$

en faisant les opérations $C_k \leftarrow C_k - x_i C_i$ pour $o \in [\![k+1, n]\!]$. Donc

$$\begin{aligned}\det(\mathrm{I}_n + XY^T) &= \det(e_1, \dots, e_n) + \sum_{k=1}^{n} \det(e_1, \dots, e_{k-1}, y_k X, e_k, \dots, e_n) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.\end{aligned}$$

Exercice 14. ●●◐ Calculer le déterminant de Vandermonde lacunaire suivant

$$D(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0^{k-1} & a_1^{k-1} & \cdots & a_{n-1}^{k-1} \\ a_0^{k+1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_{n-1}^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \cdots & a_{n-1}^n \end{vmatrix}_{[n]}$$

Correction. Partons de l'argument polynomial du calcul du déterminant de Vandermonde classique. On considère

$$P(X) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & X \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0^{k-1} & a_1^{k-1} & \cdots & a_{n-1}^{k-1} & X^{k-1} \\ a_0^{k} & a_1^{k} & \cdots & a_{n-1}^{k} & X^{k} \\ a_0^{k+1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_{n-1}^{k+1} & X^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \cdots & a_{n-1}^n & X^n \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

En développant selon la dernière colonne, on remarque que $(-1)^{n+k} D_k(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ est le coefficient du terme de degré k de P. Or, P est de degré n et s'annule en $a_0, \dots, a_{n-1}$ donc

$$P(X) = V(a_0, \dots, a_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-1} (X - a_k),$$

donc, **d'après les relations coefficients-racines,**

$$(-1)^k(-1)^{n-k}D_k(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = V(a_0, \dots, a_{n-1}) \sum_{0\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant n-1} a_{i_1}\dots a_{i_k},$$

i.e.

$$D_k(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = V(a_0, \dots, a_{n-1})(-1)^n \sum_{0\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant n-1} a_{i_1}\dots a_{i_k}$$

Exercice 15. ●●◐ On pose $A = \begin{pmatrix} c_1 & a & \cdots & a \\ b & c_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & c_n \end{pmatrix}$ où $(c_1, c_2, \dots, c_n, a, b) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $a \neq b$

1. Soit J_n la matrice composée uniquement de 1. Montrer que la fonction de la variable réelle $\varphi : x \mapsto \det(A - xJ_n)$ est polynômiale de degré 1.

Correction. Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors $A - xJ_n = \begin{pmatrix} c_1 - x & a - x & \cdots & a - x \\ b - x & c_2 - x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a - x \\ b - x & \cdots & b - x & c_n - x \end{pmatrix}$. En effectuant $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour tout i dans $[\![2, n]\!]$, on obtient un déterminant où les x ne sont que sur la première ligne. En développant selon la première ligne, on obtient bien un polynôme de degré 1.

2. Calculer $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.

Correction. On calcule :

$$\varphi(a) = \begin{vmatrix} c_1 - a & 0 & \cdots & 0 \\ b - a & c_2 - a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b - a & \cdots & b - a & c_n - a \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n}(c_k - a).$$

De même, $\varphi(b) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(c_k - b)$.

3. En déduire la valeur de $\det(A)$.

Correction. On sait que φ est de degré 1 donc pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\varphi(x) = px + q$. Or,

$$\begin{aligned} p &= \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a} = \frac{1}{b - a}\left(\prod_{k=1}^{n}(c_k - b) - \prod_{k=1}^{n}(c_k - a)\right), \\ \text{et } q &= \varphi(b) - pb \\ &= \prod_{k=1}^{n}(c_k - b) - \frac{b}{b - a}\left(\prod_{k=1}^{n}(c_k - b) - \prod_{k=1}^{n}(c_k - a)\right) \\ &= \frac{b}{b - a}\prod_{k=1}^{n}(c_k - a) - \frac{a}{b - a}\prod_{k=1}^{n}(c_k - b). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

4. Que se passe-t-il quand $a = b$?

Exercice 16. ●●◐ Soit n un entier naturel non nul, $\omega_n = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$. On pose Φ_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de coefficients $(\omega_n^{(p-1)(q-1)})_{1\leqslant p,q\leqslant n}$. On cherche dans cet exercice à calculer le déterminant de Φ_n.

1. En posant $\overline{\Phi_n}$ la matrice constituée des conjugués des coefficients de Φ_n, et en calculant $\Phi_n\overline{\Phi_n}$, déterminer le module de $\det(\Phi_n)$.

> **Correction.** Si l'on pose $\Phi_n\overline{\Phi_n} = (c_{p,q})_{1\leqslant p,q\leqslant n}$, on a, pour tout p, q dans $[\![1, n]\!]$,
>
> $$\begin{aligned} c_{pq} &= \sum_{k=1}^{n} \omega_n^{(p-1)(k-1)}\overline{\omega_n}^{(k-1)(q-1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \omega_n^{(p-1)(k-1)}\omega_n^{-(k-1)(q-1)} = \sum_{k=1}^{n} \omega_n^{(p-q)(k-1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{\frac{2i(p-q)\pi}{n}}\right)^{k-1} = \begin{cases} 0 \text{ si } p-q\neq 0 \\ n \text{ sinon.}\end{cases}\end{aligned}$$
>
> Donc $\Phi_n\overline{\Phi_n} = nI_n$, donc $\det(\Phi_n)\det(\overline{\Phi_n}) = n^n$. Or, le déterminant étant un polynôme à coefficients réels en les coefficients, $\det(\overline{\Phi_n}) = \overline{\det(\Phi_n)}$, donc $|\det(\Phi_n)|^2 = n^n$, donc $|\det(\Phi_n)| = n^{\frac{n}{2}}$.

2. Montrer que $\det(\Phi_n) = \displaystyle\prod_{0\leqslant p<q\leqslant n-1}(\omega_n^q - \omega_n^p)$.

> **Correction.** Si $x_0, \dots, x_{n-1}$ n nombres complexes, et $V(x_0, \dots, x_{n-1})$ la matrice de Vandermonde
>
> $$V(x_0,\dots,x_{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ x_0^2 & x_1^2 & & x_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1}\end{pmatrix},$$
>
> alor par le cours, $\det(V(x_0,\dots,x_{n-1})) = \displaystyle\prod_{0\leqslant p<q\leqslant n-1}(x_q - x_p)$.
>
> On remarque ensuite que $\Phi_n = V(1, \omega_n, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1})$, donc
>
> $$\det(\Phi_n) = \prod_{0\leqslant p<q\leqslant n-1}(\omega_n^q - \omega_n^p).$$

3. Démontrer que $\displaystyle\sum_{0\leqslant p<q\leqslant n-1}(p+q) = \frac{n(n-1)^2}{2}$.

> **Correction.** On calcule déjà $\displaystyle\sum_{0\leqslant p,q\leqslant n-1}(p+q)$:
>
> $$\sum_{0\leqslant p,q\leqslant n-1}(p+q) = \sum_{p=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1}(p+q) = 2n\sum_{q=0}^{n-1} q = n^2(n-1)$$
>
> Ensuite,
>
> $$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant p,q\leqslant n}(p+q) &= \sum_{0\leqslant p<q\leqslant n-1}(p+q) + \sum_{0\leqslant q<p\leqslant n-1}(p+q) + \sum_{0\leqslant p=q\leqslant n-1}(p+q) \\ &= 2\sum_{0\leqslant p<q\leqslant n-1}(p+q) + 2\sum_{p=0}^{n-1} p = 2\sum_{0\leqslant p<q\leqslant n-1}(p+q) + n(n-1),\end{aligned}$$
>
> donc
>
> $$\sum_{0\leqslant p<q\leqslant n-1}(p+q) = \frac{1}{2}\left(\sum_{1\leqslant p,q\leqslant n}(p+q) - n(n-1)\right) = \frac{n^2(n-1)-n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)^2}{2}.$$

4. En déduire qu'un argument de $\det(\Phi_n)$ est $\dfrac{\pi}{4}(n-1)(3n-2)$.

Correction. On réécrit $\det(\Phi_n)$

$$\begin{aligned}
\det(\Phi_n) &= \prod_{0\leqslant p<q\leqslant n-1} (\omega_n^q - \omega_n^p) \\
&= \prod_{0\leqslant p<q\leqslant n-1} (\mathrm{e}^{\frac{2iq\pi}{n}} - \mathrm{e}^{\frac{2ip\pi}{n}}) \\
&= \prod_{0\leqslant p<q\leqslant n-1} \mathrm{e}^{\frac{i(p+q)\pi}{n}}(\mathrm{e}^{\frac{i(q-p)\pi}{n}} - \mathrm{e}^{\frac{i(p-q)\pi}{n}}) \\
&= \prod_{0\leqslant p<q\leqslant n-1} \mathrm{e}^{\frac{i(p+q)\pi}{n}} 2i\sin\left(\frac{(q-p)\pi}{n}\right) \\
&= \exp\left(\frac{i\pi}{n}\sum_{0\leqslant p<q\leqslant n-1}(p+q)\right)\prod_{0\leqslant p<q\leqslant n-1} 2i\sin\left(\frac{(q-p)\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$

Or, $2\sin\left(\dfrac{(q-p)\pi}{n}\right) \in \mathbb{R}_+$ donc ce nombre est d'argument nul.

Ensuite, un argument de $\exp\left(\dfrac{i\pi}{n}\displaystyle\sum_{0\leqslant p<q\leqslant n-1}(p+q)\right)$ est $\dfrac{\pi}{n}\displaystyle\sum_{0\leqslant p<q\leqslant n-1}(p+q)$, c'est-à-dire $\dfrac{n(n-1)^2}{2}\dfrac{\pi}{n}$.

Enfin, le cardinal de l'ensemble $\{(p,q)\in\mathbb{N}^2 \mid 0\leqslant p<q\leqslant n-1\}$ est $\dfrac{n(n-1)}{2}$, donc un argument de $\displaystyle\prod_{0\leqslant p<q\leqslant n-1} i$ est $\dfrac{n(n-1)\pi}{4}$.

Donc un argument de $\det(\Phi_n)$ est $\dfrac{\pi}{4}\left(2(n-1)^2+n(n-1)\right) = \dfrac{\pi}{4}(3n-2)(n-1)$. Il s'agit du résultat désiré.

Exercice 17. ●●● Soient $a_1,\dots,a_n$ des nombres complexes, $\omega = e^{2i\pi/n}$, et A et Φ_n les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1}\end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)(n-1)}\end{pmatrix}.$$

Calculer $\det(AM)$ et en déduire $\det(A)$.

Correction. Calculons d'abord le produit AM : pour ce faire, en regardant les premiers termes, on va être tentés d'introduire

$$P(X) = \sum_{k=1}^{n} a_k X^{k-1}.$$

On a alors

$$AM = \begin{pmatrix} P(1) & P(\omega) & P(\omega^2) & \cdots & P(\omega^{n-1}) \\ P(1) & \frac{1}{\omega}P(\omega) & \frac{1}{\omega^2}P(\omega^2) & \cdots & \frac{1}{\omega^{n-1}}P(\omega^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(1) & \frac{1}{\omega^{n-1}}P(\omega) & \frac{1}{(\omega^{n-1})^2}P(\omega^2) & \cdots & \frac{1}{\omega^{(n-1)(n-1)}}P(\omega^{n-1})\end{pmatrix}$$

 nlaillet.math@gmail.com

Donc

$$\det(AM) = P(1)P(\omega)\dots P(\omega^{n-1})\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \frac{1}{\omega} & \frac{1}{\omega^2} & \cdots & \frac{1}{\omega^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \frac{1}{\omega^{n-1}} & \frac{1}{(\omega^{n-1})^2} & \cdots & \frac{1}{\omega^{(n-1)(n-1)}} \end{vmatrix}$$

On reconnaît un déterminant de Vandermonde, donc

$$\begin{aligned}\det(AM) &= P(1)P(\omega)\dots P(\omega^{n-1}) \prod_{0\leqslant i<j\leqslant n-1}\left(\frac{1}{\omega^j}-\frac{1}{\omega^i}\right) \\ &= P(1)P(\omega)\dots P(\omega^{n-1}) \prod_{0\leqslant i<j\leqslant n-1}\frac{1}{\omega^{i+j}} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\omega^i-\omega^j)\end{aligned}$$

Or le déterminant de M est un déterminant de Vandermonde, $\det(M) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\omega^j-\omega^i)$, donc

$$\det(A) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} P(1)P(\omega)\dots P(\omega^{n-1}) \prod_{0\leqslant i<j\leqslant n-1}\frac{1}{\omega^{i+j}}$$

Or,

$$\begin{aligned} 2\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n-1} i+j + \sum_{0\leqslant i\leqslant n-1} i &= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} i+j \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} ni + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= n^2(n-1) \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n-1} i+j = \frac{1}{2}\left(n^2(n-1) - \frac{n(n-1)}{2}\right) = \frac{n(n-1)(2n-1)}{4}.$$

donc

$$\det(A) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} P(1)P(\omega)\dots P(\omega^{n-1})\frac{1}{\omega^{\frac{n(n-1)(2n-1)}{4}}}.$$

3 Exercices plus théoriques

Exercice 18. ●○○ Montrer que si n est impair, aucune matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ antisymétrique n'est inversible.

Correction. Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n\in\mathbb{N}$ impair, antisymétrique. Alors $A^\top = -A$. Or, $\det(A) = \det(A^\top) = \det(-A) = (-1)^n\det(A) = -\det(A)$ car n est impair. Donc $\det(A) = 0$ donc A n'est pas inversible.

Exercice 19. ●○○ Montrer que la comatrice d'une matrice symétrique est symétrique.

Correction. Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Remarquons que si $B = A^\top$, si $\Delta_{ij}(A)$ est le mineur d'ordre (i,j) de A et $\Delta_{ij}(B)$ le mineur d'ordre (i,j) de B, alors $\Delta_{ij}(B) = \Delta_{ji}(A)$ (car supprimer la i-ème ligne et la j-ème colonne de B revient à supprimer la j-ème ligne et la i-ème colonne de A). Donc, en particulier, $\mathrm{Com}(A)^\top = \mathrm{Com}(A^\top)$. Donc, si A est symétrique, $\mathrm{Com}(A)^\top = \mathrm{Com}(A^\top) = \mathrm{Com}(A)$ donc $\mathrm{Com}(A)$ est symétrique.

Exercice 20. ●●◐ Soient A une matrice inversible et B une matrice quelconque. Montrer qu'il existe un voisinage J de 0 tel que $\forall x \in J$, $A + xB$ est inversible.

> **Correction.** L'application $x \mapsto \det(A + xB)$ est continue car polynomiale, elle est non nulle en 0 car A est inversible, donc on dispose d'un voisinage de 0 tel que $\det(A + xB)$ est non nul sur ce voisinage. D'où le résultat !

Exercice 21. *Navale.* ●●○

1. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(C + M) = \det M$. Montrer que $C = 0$.

   > **Correction.** Exercice assez classique, très intéressant. C'est la seule question dure de l'exercice !
   > Si jamais $C \neq 0$, alors $\mathrm{rg}(C) \geqslant 1$, donc C est **équivalente** à $J_{n,n,r}$, avec $r \geqslant 1$, i.e. on dispose de P et Q inversibles telles que $C = PJ_{n,n,r}Q$.
   > Prenons alors $M = P(\mathrm{I}_n - J_{n,n,r})Q$. Alors $C + M = P\mathrm{I}_nQ = PQ$, donc $C + M$ est inversible. Donc $\det(C + M) \neq 0$. Mais M est de rang $n - r < n$, donc M n'est pas inversible. Donc $\det(M) = 0$, absurde !
   > Donc $C = 0$.

2. Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(A+M) = \det(B+M)$. Montrer que $A = B$.

   > **Correction.** On raisonne de même, en disant que si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,
   > $$\det(A - B + M) = \det(B - B + M) = \det(M),$$
   > donc, par la question précédente, $A - B = 0$, donc $A = B$.

3. Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. On suppose : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(A+M) = \det(B+M^T)$. Montrer que $A = B^T$.

   > **Correction.** On fait de même, en pensant au fait que $\det(A + M) = \det(B^T + M)$.

Indications.

1 C'est juste un déterminant tridiagonal !

2 S'inspirer de l'exercice visant à calculer la trace de l'application de transposition.

3 **1.** Utiliser la formule $A\mathrm{Com}(A)^T = \dots$

2. Montrer que $A\mathrm{Com}(A)^T = 0$, d'intéresser à une inclusion d'une image dans un noyau. Puis parler de déterminant extrait...

3. Parler de déterminants extraits.

5 Les questions sont très guidées. Pour la dernière, penser au fait qu'un polynôme qui ne s'annule pas en i n'est pas nul et ne s'annule donc pas sur tout $\mathbb{R}$.

6 **1.** Faire un calcul direct.

2. N'y a-t-il pas des lignes identiques ?

3. Faire des opérations sur les lignes pour échelonner la matrice.

4. Faire $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ et $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$

5. Sommer toutes les colonnes sur la première.

6. Soustraire la colonne 1 aux colonnes 2 et 3, puis utiliser ses formules de trigo !

7 Factoriser par $\dfrac{1}{\sin(t)}$, puis effectuer des opérations sur les lignes ($L_1 \leftarrow L_1 - \cos(t)L_2$ et $L_2 \leftarrow L_2 + \cos(t)L_1$)

8 **1.** Il s'agit d'un déterminant tridiagonal !

2. Il s'agit d'une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

3. Faire de même...

9 Soustraire la seconde colonne à la première, et développer. Puis, dans le deuxième déterminant, essayer d'obtenir un déterminant triangulaire avec une diagonale de 1.

10 Développer selon la première ligne et développer le second déterminant selon la première ligne.

11 Démontrer que la famille des $P_j = (X+j-1)^k$, $1 \leqslant j \leqslant n$ est liée si $n \geqslant \dim(\mathbb{R}_k[X])+1 = k+2$.

12 Effectuer **dans l'ordre** $L_n \leftarrow L_{n-1}$, $L_{n-1} \leftarrow L_{n-2}$, etc.

13 D'abord, montrez que $\mathrm{I}_n + XY^T = (y_1X+e_1, y_2X+e_2, \dots, y_nX+e_n)$. Puis utiliser la n-linéarité, et se rendre compte que beaucoup de déterminants sont nuls...

14 Partir de l'argument polynomial du calcul du déterminant de Vandermonde classique et considérer

$$P(X) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & X \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0^{k-1} & a_1^{k-1} & \cdots & a_{n-1}^{k-1} & X^{k-1} \\ a_0^{k} & a_1^{k} & \cdots & a_{n-1}^{k} & X^{k} \\ a_0^{k+1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_{n-1}^{k+1} & X^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0^{n} & a_1^{n} & \cdots & a_{n-1}^{n} & X^{n} \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

15 **1.** Faire les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour tout i dans $[\![2, n]\!]$.

2. Ce sont juste de simples calculs de déterminants triangulaires.

3. Il s'agit de retrouver le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine d'une fonction affine.

4. Calculer à la main le déterminant ou faire une limite de fonctions !

16 **1.** Montrer que $\Phi_n\overline{\Phi_n} = nI_n$.

2. Utiliser une matrice de Vandermonde.

3. Commencer par calculer $\displaystyle\sum_{0\leqslant p,q\leqslant n-1} (p+q)$.

4. Démontrer que $\det(\Phi_n) = \exp\left(\frac{i\pi}{n}\sum_{0\leqslant p<q\leqslant n-1}(p+q)\right)\prod_{0\leqslant p<q\leqslant n-1} 2i\sin\left(\frac{(q-p)\pi}{n}\right)$.

16 Reconnaître dans $\det(AM)$ et $\det(M)$ deux déterminants de Vandermonde.

18 Que vaut $\det(A^T)$?

19 Revenir à la définition de la comatrice.

20 Utiliser le fait que le déterminant de $A + tM$ est polynomial donc continu !

21 Utiliser le fait que toute matrice est équivalente à $J_{n,n,r}$. Et montrer que dans ce cas, si C est équivalente à $J_{n,n,r}$, r doit être nul. POur la suite, ce sont des adaptations de la première question.