

TD 28

Espaces préhilbertiens réels

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. Soit p un projecteur d'un espace vectoriel euclidien E . Démontrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 2. ●●○ Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace vectoriel euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . Soit u un endomorphisme de E . On définit l'application u^* de E dans E par

$$\forall x \in E, u^*(x) = \sum_{i=1}^n (x|u(e_i))e_i.$$

1. Montrer que u^* est un endomorphisme de E . On l'appelle *adjoint* de u .
2. (i) Soit x dans E . Montrer que pour tous x et y de E , $(u^*(x)|y) = (x|u(y))$.
(ii) Montrer que la propriété précédente caractérise l'adjoint, i.e. que si $v \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\forall (x, y) \in E^2, (v(x)|y) = (x|u(y))$, alors $v = u^*$.
(iii) Si $u \in \mathcal{L}(E)$, déterminer $(u^*)^*$.
3. Montrer que la définition de u^* ne dépend pas de la base orthonormale choisie.
4. Si M est la matrice de u dans \mathcal{B} , exprimer la matrice de u^* dans \mathcal{B} en fonction de M .
5. Montrer que $\ker(u^*) = \text{Im}(u)^\perp$ et que $\text{Im}(u^*) = \ker(u)^\perp$.

Exercice 3. ●○○ Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'expression $(A|B) = \text{Tr}(A^T B)$ munit E d'un produit scalaire.
2. Soient $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ les sous-espaces vectoriels respectivement constitués des matrices symétriques et antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des supplémentaires orthogonaux.
3. Soit $A = (a_{ij})$ un élément de E . Exprimer, à l'aide des coefficients $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$,

$$\min_{M=(m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} - m_{ij})^2.$$

Exercice 4. Famille de polynômes orthogonaux

1. Montrer que $(P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 P(t) \cdot Q(t) \cdot dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Démontrer qu'il existe une famille (Q_n) de polynômes deux à deux orthogonaux vérifiant $\deg(Q_n) = n$.
3. Montrer que Q_n a la même parité que $n(Q_n(-x) = (-1)^n \cdot Q_n(x))$.
4. Montrer que Q_n admet n racines distinctes, toutes entre -1 et 1 .

Exercice 5. ●●○ Soit E un espace euclidien de dimension n , \mathcal{B} une base orthonormée de E .

1. Soit \mathcal{B}' une autre base orthonormée de E . Démontrer que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ satisfait $A \times A^T = I_n$. En déduire la valeur de $\det(A)$.
2. Soit (u_1, \dots, u_n) une famille orthogonale de E . Montrer que $|\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)| = \|u_1\| \dots \|u_n\|$.
3. Soit (x_1, \dots, x_n) une famille quelconque de E . Montrer que $|\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)| \leq \|x_1\| \dots \|x_n\|$.

Exercice 6. *Matrice et déterminant de Gram.* ●●● Soient (x_1, \dots, x_p) un système de p vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n . Soit \mathcal{E} une base orthonormée de E . On appelle matrice de Gram associée à (x_1, \dots, x_p) la matrice

$$\mathcal{G}(x_1, \dots, x_p) = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_p \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_p, x_1 \rangle & \langle x_p, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_p, x_p \rangle \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\mathcal{G}(x_1, \dots, x_p)$ est une matrice symétrique.

On appelle déterminant de Gram de (x_1, \dots, x_p) la quantité $G(x_1, \dots, x_p) = \det(\mathcal{G}(x_1, \dots, x_p))$.

2. (i) Montrer que $G(x_1, \dots, x_p) = 0$ si et seulement si (x_1, \dots, x_p) est lié.
(ii) Soit M la matrice de (x_1, \dots, x_p) dans la base \mathcal{E} . Montrer que $\mathcal{G}(x_1, \dots, x_p) = M^T M$.
(iii) Montrer que lorsque (x_1, x_2, \dots, x_p) est libre, on a $G(x_1, \dots, x_p) > 0$.
3. En orthonormalisant le système (x_1, \dots, x_p) , montrer que

$$G(x_1, \dots, x_p) \leq \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \dots \|x_p\|^2.$$

4. On suppose le système (x_1, \dots, x_p) libre. Soit z le projeté orthogonal d'un vecteur y sur le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$. Montrer que $\|y - z\|^2 = \frac{G(y, x_1, \dots, x_p)}{G(x_1, x_2, \dots, x_p)}$.

Stratégie.

- commencer par deux petits exercices : 7, 12.
- utiliser ensuite Cauchy-Schwarz : 9.
- faire un exercice sur les endomorphismes : ou bien 14 dans sa version plus simple, ou bien 20 pour une version plus corsée.

2 Notion de produit scalaire, d'orthogonalité

Exercice 7. ●○○ Vérifier que les applications suivantes sont des produits scalaires sur les espaces mentionnés

(i) $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\langle P|Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$.

(ii) $E = \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, $(f|g) = f(a)g(a) + \int_a^b f'(t)g'(t)dt$.

Exercice 8. *Un produit scalaire original.* ●●● Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On considère une suite $(a_n)_n$ à valeurs dans $[0, 1]$. On pose alors $(f|g) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k} f(a_k)g(a_k)$

1. Justifier que cette quantité est bien définie.
2. Montrer que c'est un produit scalaire si et seulement si $(a_n)_n$ est dense dans $[0, 1]$.

Exercice 9. ●●○ Montrer que $\sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}} \leq \sqrt{(n+1)2^n}$.

Exercice 10. ●●○

Déterminer le minimum, pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $\sum_{k=1}^n x_k = 1$, de la quantité $\sum_{k=1}^n x_k^2$.

Exercice 11. ●●○

Soient E un eve et x, y dans E . Développer l'expression

$$\left\| \|y\|^2 x - \langle x, y \rangle y \right\|^2$$

et retrouver une inégalité célèbre.

Exercice 12. ●●○ Soit E un espace vectoriel euclidien, F et G deux parties de E . Démontrer que $(F \cup G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

Exercice 13. *Calculs explicites.* ●●○ On considère \mathbb{R}^3 muni de sa structure euclidienne canonique.

- Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur la droite dirigée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.
- Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + y + z = 0$.
- Déterminer la distance de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ au plan d'équation $x - y + z = 0$.

Exercice 14. ●●○ Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer l'équivalence suivante

$$(\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0) \Leftrightarrow (\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle).$$

Exercice 15. *Quelques contre-exemples en dimension infinie.* ●●○ Soit $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$.

- Soit $H = \{f \in E, f(0) = 0\}$. Montrer que $H^\perp = \{0\}$, et conclure que $(H^\perp)^\perp \neq H$.
- Soit

$$A = \{f \in E, \forall t \in [-1, 0], f(t) = 0\}$$

$$B = \{f \in E, \forall t \in [0, 1], f(t) = 0\}.$$

Démontrer que $A^\perp = B$, que $B^\perp = A$, mais que $(A \cap B)^\perp \neq A^\perp + B^\perp$.

Exercice 16. ●●○ Sur $E = \mathbb{E}_n[X]$, on définit $(P|Q) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx$.

- Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
- On considère pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ le polynôme U_k défini par $\forall x \in \mathbb{R}, U_k(x) = \frac{d^k}{dx^k} ((x^2 - 1)^k)$. Montrer que (U_0, \dots, U_n) est une base orthogonale de E .
 - Calculer à l'aide d'un changement de variables $x = \cos(t)$ l'intégrale $\int_{-1}^1 (x^2 - 1)^k dx$. On utilisera la formule (non au programme, mais vue 2 fois en DM) des intégrales de Wallis, et on contrôlera qu'on sait calculer cette formule.
 - En déduire une base orthonormale, formée de vecteurs colinéaires et de même sens que U_0, \dots, U_n .

3 Endomorphismes des espaces euclidiens

Exercice 17. Similitudes. ●●○ Soit E un espace euclidien, $u \in GL(E)$. On dit que u est une similitude de E s'il existe λ dans \mathbb{R}_+^* tel que pour tout x dans E , $\|u(x)\| = \lambda \|x\|$.

1. Démontrer que si u est une similitude, alors pour tous x et y dans E , $\langle u(x), u(y) \rangle = \lambda^2 \langle x, y \rangle$. En déduire que $x \perp y \Rightarrow u(x) \perp u(y)$.

Réciproquement, on suppose que u est un endomorphisme préservant l'orthogonalité, i.e. que pour tous x et y dans E , $x \perp y \Rightarrow u(x) \perp u(y)$. Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de E .

2. En considérant $e_1 + e_2$ et $e_1 - e_2$, démontrer que $\|u(e_1)\| = \|u(e_2)\|$.
3. En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout x dans E , $\|u(x)\| = \lambda \|x\|$.

Exercice 18. Isométries. ●●○ Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est une isométrie si pour tout x dans E , $\|u(x)\| = \|x\|$.

1. Démontrer que l'ensemble des isométries constitue un sous-groupe de $GL(E)$.
2. Démontrer que u est une isométrie si, et seulement si pour tous x et y de E , $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.
3. Démontrer que u est une isométrie si et seulement si la matrice A de u dans une base orthonormée \mathcal{B} vérifie $A \times A^T = I_n$.
4. Vérifier que les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ sont des isométries de \mathbb{R}^2 . Quelle transformation géométrique représentent-elles ?

Exercice 19. Endomorphismes symétriques. ●●○ Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace vectoriel euclidien et u un endomorphisme de E . On suppose dans cet exercice que u est autoadjoint (on dit parfois « symétrique »), c'est-à-dire que $u^* = u$.

1. Que peut-on dire de la matrice de u dans \mathcal{B} ?
2. Que peut-on dire de $\ker(u)$ et de $\text{Im}(u)$?
3. *Caractérisation des symétries et projecteurs orthogonaux.*
 - (a) Montrer qu'un projecteur de E est autoadjoint si et seulement si c'est un projecteur orthogonal.
 - (b) Montrer que symétrie de E est autoadjointe si et seulement si c'est une symétrie orthogonale.

Exercice 20. Endomorphismes anti-adjoints. ●●○ Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace vectoriel euclidien et u un endomorphisme de E . On suppose dans cet exercice que u est antiadjoint ou antisymétrique, i.e. $u^* = -u$.

1. Que peut-on dire de la matrice de u ?
2. Que peut-on dire de l'image et du noyau de u ?
3. Montrer que u est antiadjoint si et seulement si $\forall x \in E$, $(u(x)|x) = 0$.
4. (a) Montrer que pour tout x et λ dans \mathbb{R} tels que $u(x) = \lambda x$, on a $\lambda = 0$ ou $x = 0$.
(b) Soit v l'endomorphisme de $\text{Im}(u)$ induit par u (i.e. la restriction de u à $\text{Im}(u)$, à valeurs dans $\text{Im}(u)$). Montrer que pour tout λ réel, $\det(v - \lambda \text{Id}) \neq 0$.
(c) En déduire que le rang de u est pair.

Indications.

- 2 1. Simples vérifications.
2. (i) Attention à ne pas se mélanger entre les réels et les vecteurs ! Écrire soigneusement les choses et penser que $(e_i|e_j) = \delta_{ij}$.
(ii) Décomposer y sur la base (e_j) , et utiliser le fait que $(u^*(x)|e_j) = (x|u(e_j))$.
(iii) Prendre $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tous x et y dans E , $(v(x)|y) = (x|u(y))$ et démontrer que $v - u^* = 0$.

- (iv) Utiliser la question précédente.
 - 3. Vérifier que toutes les questions précédentes fonctionnent si on change de base.
 - 4. Démontrer qu'il s'agit de ${}^T M$.
 - 5. Pour la première égalité, procéder par double inclusion. Pour la seconde, utiliser une inclusion et un argument de dimension.
- 3**
1. Question de cours!
 2. Deux choix : démontrer l'orthogonalité, puis la supplémentarité, ou bien l'orthogonalité, puis l'égalité des dimensions!
 3. Utiliser une projection orthogonale sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (propriété de minimisation de la distance).
- ?? Démontrer, dans l'ordre :
- la dernière inégalité à l'aide du produit scalaire canonique $\boxed{\text{sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et à l'aide de Cauchy-Schwarz et de la matrice J constituée de 1.
 - l'inégalité centrale en utilisant que tous les coefficients sont de valeur absolue ≤ 1 , donc sont supérieurs à leur carré.
 - l'inégalité de gauche à l'aide du produit scalaire canonique $\boxed{\text{sur } \mathbb{R}^n}$, et en considérant les colonnes de A .
- 5** Essayer de visualiser l'exercice en termes de volume.
1. Utiliser que la matrice de (u_1, \dots, u_n) dans une BON est orthogonale.
 2. Appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt à (x_1, \dots, x_n) .
- 6**
1. Vient de la symétrie du produit scalaire.
 2. (i)
(ii) Revenir aux coefficients.
(iii) Utiliser que $\det(\mathcal{G}(x_1, \dots, x_p)) = \det(M^T M)$.
 3. Utiliser l'inégalité d'Hadamard.
 4. Si p est la projection orthogonale sur $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$, la distance cherchée est $\|y - p(y)\|$. Puis démontrer que

$$G(x_1, \dots, x_p, y) = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \dots & \langle x_1, x_n \rangle & \langle x_1, p(x) \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \dots & \langle x_n, x_n \rangle & \langle x_n, p(x) \rangle \\ \langle p(x), x_1 \rangle & \langle p(x), x_2 \rangle & \dots & \langle p(x), x_n \rangle & \|p(x)\|^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \dots & \langle x_1, x_n \rangle & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \dots & \langle x_n, x_n \rangle & 0 \\ \langle p(x), x_1 \rangle & \langle p(x), x_2 \rangle & \dots & \langle p(x), x_n \rangle & \|u\|^2 \end{vmatrix}.$$

- 7** Je donne des indications uniquement pour le caractère défini.
- (i) Utiliser la formule de Taylor pour les polynômes.
 - (ii) Utiliser le fait que l'intégrale du carré d'une fonction continue est nulle ssi cette fonction est nulle.
- 9** Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n .
- 10** Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et le cas d'égalité.
- 11** La difficulté réside dans le fait de savoir qui est un vecteur, qui est un scalaire. On doit retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
- 12** Démontrer le résultat par double inclusion.
- 14** Pour le sens direct, utiliser que $\langle u(x+y), x+y \rangle = 0$, puis développer. Le sens réciproque est évident.
- 15**
1. Prendre, $f \in H^\perp$, g qui coïncide avec f sauf éventuellement autour de 0, de sorte que fg soit de signe constant.
 2. Si $f \in A^\perp$, prendre $g : t \mapsto tf(t)$ sur $[0, 1]$ et nulle sinon.
Ensuite, vérifier que $A \cap B = \{0\}$, donc $(A \cap B)^\perp = E$, mais que $A^\perp + B^\perp \neq E$.
- 16**
1. C'est du cours.

2. (i) Utiliser que toutes les dérivées j -èmes, avec $j \leq k$, de $(x^2 - 1)^k$, sont nulles en 1 et en -1 , et faire une récurrence.
- (ii) Poser $x = \cos(t)$.
- (iii) Utiliser la récurrence pour calculer la norme de P_k .

19 Utiliser l'exercice 2, et

1. S'intéresser au caractère symétrique ou antisymétrique de la matrice.
2. Montrer que l'image et le noyau sont supplémentaires orthogonaux.
3. (a) Faire une double implication.
- (b) Montrer que si une symétrie est autoadjointe, alors $\ker(s - \text{Id}) \perp \ker(s + \text{Id})$. Pour la réciproque, utiliser qu'un projecteur orthogonal est autoadjoint.

20 Utiliser l'exercice 2, et

1. Que peut-on dire de la matrice de u ?
2. Montrer que ce sont des supplémentaires orthogonaux.
3. Pour le sens réciproque, utiliser $(u(x + y)|x + y)$.
4. (a) Montrer que $\lambda \|x\|^2 = 0$.
- (b) Montrer que pour tout λ , $v - \lambda \text{Id}$ est inversible, donc pour tout λ , $v - \lambda \text{Id}$ est non nul.
- (c) Montrer que, pour $\lambda = 0$, $\det(v) \neq 0$, et montrer qu'une matrice antisymétrique en dimension impaire n'est pas inversible.