Sujet 1

Cours

Attendre la question

Application cours 1

Etudier les limites de $f : x \mapsto x \left\lfloor \frac{2}{x} \right\rfloor$ aux bornes de son ensemble de définition.

Application cours 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^{k+1} = A^k$, alors $A^k - A$ est nilpotente.

Exercice 1

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ injective vérifiant le théorème des valeurs intermédiaires. Montrer que f est continue.

Sujet 2

Cours

Attendre la question

Application cours 1

Montrer qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ périodique qui admet une limite finie en $+\infty$ est constante.

Application cours 2

La fonction $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x)\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array}$ se prolonge-t-elle par continuité en 0 ?

Exercice 1

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continues en 0 vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}.$$

Sujet 3

Cours

Attendre la question

Application cours 1

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. On suppose qu'il existe $\ell \in [0;1[$ tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$.

Montrer que f admet un point fixe.

Application cours 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exprimer la matrice A^2 en fonction des matrices A et I_2.

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\lim_{x \to 0} f(x) + \frac{1}{f(x)} = 2$$

.

1. Montrer que f est bornée au voisinage de 0.

2. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Sujet 4

Cours

Attendre la question

Application cours 1

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue telle que la restriction de f à $\mathbb{Q}$ est strictement croissante. Montrer que f est strictement croissante.

Application cours 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer la puissance k-ème de A.

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}_+$.

Déterminer la limite en 0 de $x \mapsto x^a \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$.

Sujet 5

Cours

Attendre la question

Application cours 1

La fonction $h: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \end{array}$ se prolonge-t-elle par continuité en 0 ?

Application cours 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exprimer A^2 en fonction de A et I_3.

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Montrer que f est continue.

Sujet 6

Cours

Attendre la question

Application cours 1

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $f(x) < g(x)$ pour tout nombre $x \in \mathbb{Q}$.

1. Montrer que $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que l'on a pas nécessairement $f(x) < g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 1

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continues en 0 vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}.$$